

2.1. Олимпиада им. И.В.Савельева (отборочный тур олимпиады «Росатом»), 11 класс

1. На вечеринку пришли четыре семейные пары: Ивановых, Петровых, Голиковых и Проваловых. Женскую половину представляли Маша, Татьяна, Женя и Надежда. Петр Иванов выпил в 2 раза, Иван Петров - в 4 раза, Кузьма Голиков – 3 раза, Денис Провалов – 5 раз больше бокалов лимонада, чем их жены. Было жарко, все пили лимонад. Женщины выпили 14, мужчины - 36 бокалов лимонада. Какая фамилия у Жени, если она выпила лимонада больше всех?

2. При каком x , удовлетворяющим уравнению $\sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \sin\frac{\pi}{12}\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12}\cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$, функция $y = \sin\frac{x}{2}$ принимает наибольшее значение?

3. Координаты вершин треугольника ABC целые числа $(x; y)$ - решения уравнения $x \cdot 3^{x+y+1} + 4y + (17 - 4y)3^{x+y} = 17 + 3x$. Найти наименьшее возможное значение его площади.

4. Две арифметические прогрессии $\{a_n\}$ и $\{b_m\}$ обладают тем свойством, что отношение суммы первых n членов прогрессии $\{a_n\}$ к сумме первых m членов прогрессии $\{b_m\}$ равно $(2n^2 + 3n) : (4m^2 + 5m)$ для любых натуральных чисел n и m . При каких n и m $a_n = b_m$?

5. Найти целые a , при которых уравнение $\sqrt[3]{(x-2a)^3} + 30\sqrt[3]{x^3} = 19\sqrt[3]{x^2(x-2a)}$ имеет два целых $x < -8$ своими решениями.

6. Три кубика поставлены один на другой образуя «пирамидку» так, что плоскости их общих граней совпадают, а их центры лежат на одной прямой, перпендикулярной этим плоскостям. Внизу «пирамидки» расположен куб с ребром 2, над ним - куб с ребром 1,5 сверху – куб с ребром 1. Найти наибольшее возможное значение площади полной поверхности «пирамидки».

Ответы и решения

Задача 1

Решение

Пусть x, y, z и u - количество бокалов выпитых женами Иванова, Петрова, Голикова и Провалова

По условию, $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1, u \geq 1$ и $\begin{cases} x + y + z + u = 14 \\ 2x + 4y + 3z + 5u = 36 \end{cases} \rightarrow 2y + z + 3u = 8$

Значение $u = 1$ единственно возможное, тогда $2y + z = 5 \rightarrow \begin{cases} y = 1, z = 3 \\ y = 2, z = 1 \end{cases}$.

В первом случае, $x = 9$, во втором - $x = 10$. В любом из них Женя имеет фамилию Иванова.

Задача 2 Ответ: $x_{\max} = \frac{7\pi}{6} + 4\pi m, m \in \mathbb{Z}$

Решение

1. Уравнение не содержит решений, для которых $\cos x = 0$.

Если $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, то левая часть уравнения

$$\begin{aligned} & \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} + \pi k\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} + \pi k\right) + \sin\frac{\pi}{12} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} + \pi k\right) = \\ & = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi + 2\pi k\right) - \sin\frac{\pi}{12} \cos\frac{\pi}{12} = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \neq 0, \forall k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

2. Уравнение не содержит решений, для которых $\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 0 \rightarrow x = \frac{5\pi}{12} + \pi k$.

Если $x = \frac{5\pi}{12} + \pi k$, то левая часть уравнения

$$\begin{aligned} & \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) + \sin\frac{\pi}{12} \sin\left(\frac{5\pi}{12} + \pi k\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = \\ & = \sin\frac{\pi}{12} \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{4} \neq 0, \forall k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

3. Разделим правую и левую часть уравнения на $\cos\frac{\pi}{12} \cdot \cos x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$:

$$\frac{\sin\frac{\pi}{12} \cos x + \cos\frac{\pi}{12} \sin x}{\cos\frac{\pi}{12} \cos x} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 1 \rightarrow \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 1$$

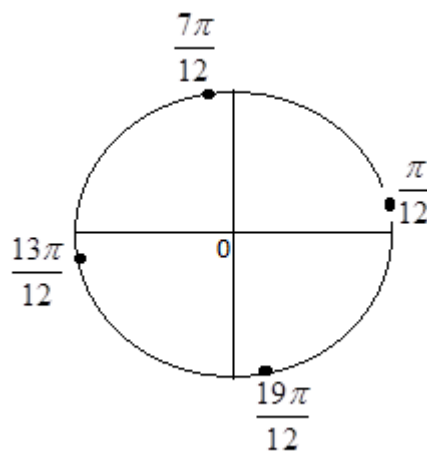
По формуле тригонометрии $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{12}\right) \cdot \left(1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} \cdot \operatorname{tg} x\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} + \operatorname{tg} x$, поэтому

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{12}\right) \cdot \left(1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} \cdot \operatorname{tg} x\right) + \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 1$$

Решением исходного уравнения является серия $x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

4. Оценим значения $y = \sin\frac{x}{2}$ на решениях уравнения: $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$.

На рис. на единичном круге изображены точки, соответствующие значения $\frac{x}{2}$.



Наибольшее значение функции достигается для $\frac{x}{2} = \frac{7\pi}{12} + 2\pi m \rightarrow x_{\max} = \frac{7\pi}{6} + 4\pi m$.

Задача 3 Ответ: $S_{ABC} = \frac{1}{2}$

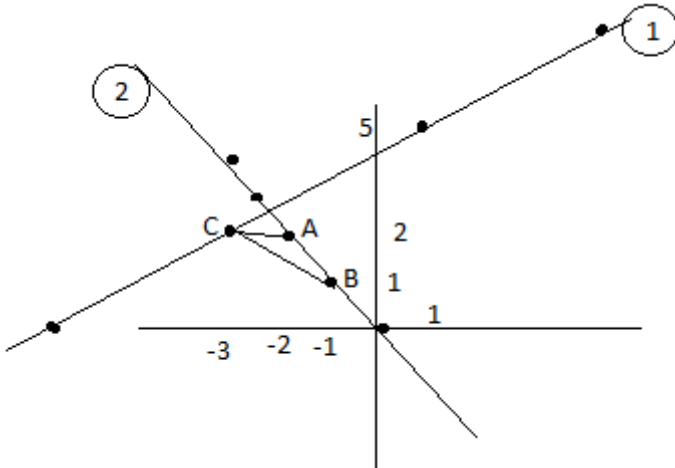
Решение

Разложение на множители: $(3x - 4y + 17)(3^{x+y} - 1) = 0$.

Решение в целых числах уравнения $3x - 4y + 17 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 2 + 3t, t \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Решение в целых числах уравнения $3^{x+y} - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = u \\ y = -u, u \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

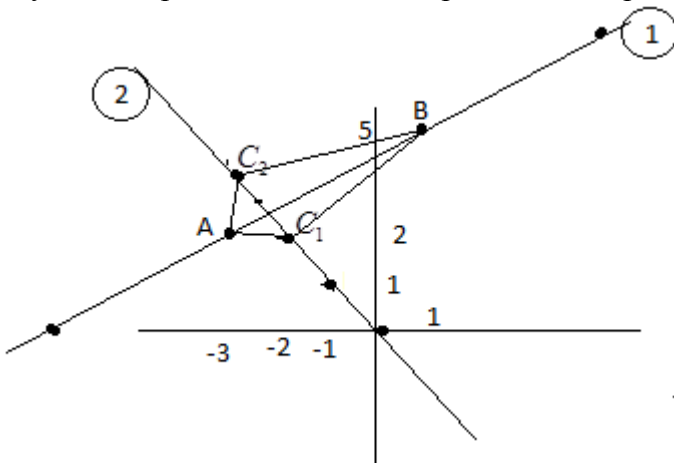
На рис. изображено множество решений уравнения:



1 случай. Сторона AB лежит на прямой с номером 2, а вершина C на прямой 1. Наименьшая длина стороны AB равна $\sqrt{2}$. Наименьшей высоте треугольника соответствует вершина $C(-3; 2)$.

Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}$.

2 случай. Сторона AB лежит на прямой с номером 1, а вершина C на прямой 2.



Наименьшая длина стороны AB равна 5. Ближайшие к прямой 1 вершины $C_1(-2, 2)$ и $C_2(-3, 3)$.

Площадь треугольника ABC_1 равна $\frac{3}{2}$, площадь треугольника ABC_2 равна 2.

Задача 4 Ответ: $\begin{cases} m = k \\ n = 2k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}, k > 0$

Решение варианта 1.

Обозначим через S_n^a и S_m^b суммы n и m первых членов искоемых прогрессий. Тогда по условию

задачи $S_n^a : b_1 = (2n^2 + 3n) : 9 \rightarrow S_n^a = \frac{b_1(2n^2 + 3n)}{9}$ для всех n .

Тогда $S_{n-1}^a = \frac{b_1(2(n-1)^2 + 3(n-1))}{9}$ и $a_n = S_n^a - S_{n-1}^a = \frac{b_1}{9}(2(2n-1) + 3) = \frac{b_1}{9}(4n+1)$

Аналогично, $a_1 : S_m^b = 5 : (4m^2 + 5m) \rightarrow S_m^b = \frac{a_1}{5}(4m^2 + 5m)$ и

$$b_m = S_m^b - S_{m-1}^b = \frac{a_1}{5}(4(2m-1) + 5) = \frac{a_1}{5}(8m+1). \text{ Заметим, что } a_1 : b_1 = 5 : 9 \rightarrow \frac{a_1}{5} = \frac{b_1}{9}.$$

$$\text{Равенство } a_n = b_m \text{ возможно, если } \frac{b_1}{9}(4n+1) = \frac{a_1}{5}(8m+1) \rightarrow 4n+1 = 8m+1 \rightarrow n = 2m$$

Задача 5 Ответ: Для $a \leq 312496$ $a_1 = 138811$, $a_2 = 277622$. Для $a > 312496$ ответом является любое целое a делящееся на произведение любых двух из чисел 127, 1093, 39062, но не делящееся на произведение трех этих чисел.

Решение

Случай 1. $x = 2a \rightarrow x = 0 \rightarrow a = 0$, $x = 0 \rightarrow x = 2a \rightarrow a = 0$, т.е. при $a = 0$ уравнение имеет целое решение $x = 0 > -8$.

Случай 2. $x^2(x-2a) \neq 0$. Разделим правую и левую части уравнения на $\sqrt[7]{x^2(x-2a)}$ и, обозначая через $t = \sqrt[7]{\frac{x-2a}{x}}$, приходим к уравнению $t^2 + \frac{30}{t} = 19$. Кубическое уравнение $t^3 - 19t + 30 = 0$ имеет три корня: $t_1 = 2$, $t_2 = 3$, $t_3 = 5$.

$$2.1. \frac{x-2a}{x} = 128 \rightarrow x_1 = -\frac{2a}{127} < -8 \rightarrow a > 508$$

$$2.2. \frac{x-2a}{x} = 3^7 = 2187 \rightarrow x_2 = -\frac{a}{1093} < -8 \rightarrow a > 8744$$

$$2.3. \frac{x-2a}{x} = 5^7 = 78125 \rightarrow x_3 = -\frac{a}{39062} < -8 \rightarrow a > 312496$$

Два (нецелых) решения бывает, если $8744 < a \leq 312496$. Они окажутся целыми, если $a = 127k = 1093m$, $k, m \in \mathbb{Z}$. Поскольку числа 127 и 1093 простые, этому условию удовлетворяют a кратные их произведению, т.е. $a = 138811n$, $n \in \mathbb{Z}$. В указанном интервале таких чисел всего два $a_1 = 138811$, $a_2 = 277622$.

При $a > 312496$ уравнение имеет три (нецелых) решения. Если два из них целые, а третье нецелое, то такие a также удовлетворяют условию задачи.

А. x_1, x_2 – целые, а x_3 не целое число. Тогда $a = 138811n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 39062 \cdot t$, $t \in \mathbb{Z}$, поскольку числа 127, 1093, 39062 – взаимно простые.

Б. x_1, x_3 – целые, а x_2 не целое число.

Тогда $a = 127 \cdot 39062 \cdot n = 4960874n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 1093 \cdot t$, $t \in \mathbb{Z}$.

В. x_2, x_3 – целые, а x_1 не целое число.

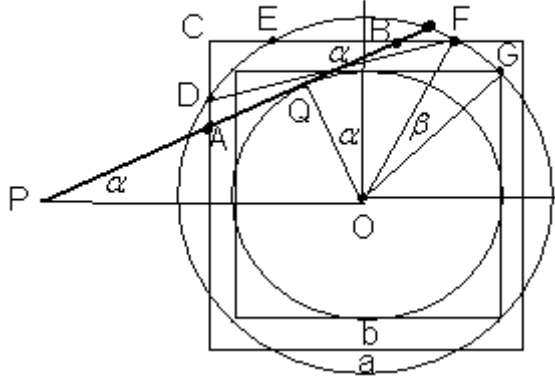
Тогда $a = 1093 \cdot 39062 \cdot n = 42694766n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 127 \cdot t$, $t \in \mathbb{Z}$

Таким образом, целое число $a > 312496$ искомое, если оно делится на произведение любых двух из чисел 127, 1093, 39062, но не делится на произведение трех этих чисел.

Задача 6 Ответ: $S_{\text{полн, max}} = 54 - 12\sqrt{2}$

Решение варианта 1.

$S_{\text{пол}} = 6(a^2 + b^2 + c^2) - 2S_{ab} - 2S_{bc}$, где S_{ab}, S_{bc} – площади общих частей граней кубов с ребрами a, b и b, c соответственно. Максимальное значение $S_{\text{пол}}$ соответствует минимальным значениям S_{ab}, S_{bc} .



Случай 1. $\frac{a}{\sqrt{2}} \leq b \leq a$ и минимизация S_{ab} : повернем квадрат со стороной b на угол α . На интервале $\alpha \in (0; \beta)$ вершина G движется по дуге большой окружности до точки F , при этом меньший квадрат находится внутри большого квадрата и $S_{ab} = b^2$ - постоянная.

Заметим, что $\beta = \frac{\pi}{4} - \arccos \frac{a}{b\sqrt{2}}$, DF - сторона квадрата при $\alpha = \beta$. При $\alpha = \varphi = \frac{\pi}{4} + \arccos \frac{a}{b\sqrt{2}}$ вершина G переместится в точку E , и меньший квадрат вновь окажется внутри большого, $S_{ab}(\varphi) = b^2$. Найдём минимальное значение функции $S_{ab}(\alpha)$ на отрезке $[\beta; \varphi]$.

$$OQ = \frac{b}{2}, \quad OP = \frac{b}{2 \sin \alpha}, \quad u = AC = \frac{a}{2} - \left(\frac{b}{2 \sin \alpha} - \frac{a}{2} \right) \operatorname{tg} \alpha = \frac{a(\sin \alpha + \cos \alpha) - b}{2 \cos \alpha},$$

$$v = CB = u \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a(\sin \alpha + \cos \alpha) - b}{2 \sin \alpha}$$

Замена переменной $t = \sin \alpha + \cos \alpha \rightarrow t^2 - 1 = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

Область значений функции $t = t(\alpha) = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$, $\alpha \in [\beta; \varphi]$:

При $\alpha = \frac{\pi}{4}$ функция принимает максимальное значение $\sqrt{2}$. Значения на концах отрезка одинаковые и равны $t(\beta) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{a}{b\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \cos \left(\arccos \frac{a}{b\sqrt{2}} \right) = \frac{a}{b}$,

$$\text{поэтому } t \in \left[\frac{a}{b}; \sqrt{2} \right].$$

$$\text{поэтому } t \in \left[\frac{a}{b}; \sqrt{2} \right].$$

$$\text{Функция } S_{ab}(\alpha) = a^2 - 4 \cdot \frac{uv}{2} = a^2 - \frac{(a(\sin \alpha + \cos \alpha) - b)^2}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = a^2 - \frac{(at - b)^2}{t^2 - 1}$$

Исследуем функцию $S_{ab}(t)$ на отрезке $\left[\frac{a}{b}; \sqrt{2} \right]$.

$$\text{Критические точки: } S'_{ab}(t) = - \frac{2(at - b)(bt - a)}{(t^2 - 1)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} t = b/a \notin \left[\frac{a}{b}; \sqrt{2} \right] \\ t = a/b - \text{на границе} \end{cases}$$

$$S_{ab} \left(\frac{a}{b} \right) = a^2 - \frac{(a^2/b - b)^2}{a^2/b^2 - 1} = a^2 - (a^2 - b^2) = b^2$$

$$S_{ab}(\sqrt{2}) = a^2 - (a\sqrt{2} - b)^2 = 2ab\sqrt{2} - b^2 - a^2$$

Заметим, что $S_{ab}(\sqrt{2}) < S_{ab}(a/b)$, т.к. $2ab\sqrt{2} - b^2 - a^2 < b^2 \Leftrightarrow 2b^2 - 2ab\sqrt{2} + a^2 > 0 \Leftrightarrow (b\sqrt{2} - a)^2 > 0$.

Таким образом, минимальное значение $S_{ab}(\alpha)$ достигается при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ($t = \sqrt{2}$) и равно $2ab\sqrt{2} - b^2 - a^2$.

Случай 2. $\frac{a}{\sqrt{2}} > b$. $S_{ab}(\alpha) = b^2$ – постоянная величина.

В варианте 1 $a = 2$, $b = 1,5$, $c = 1$. Для кубиков со сторонами $a = 2$ и $b = 1,5$ реализуется случай 1,

$$\text{поэтому } S_{ab} = 2ab\sqrt{2} - a^2 - b^2 = 6\sqrt{2} - 4 - 2,25 = \frac{24\sqrt{2} - 25}{4}$$

Для пары кубиков со сторонами $b = 1,5$ и $c = 1$ реализуется случай 2, поэтому $S_{bc} = c^2 = 1$.

$$\text{Тогда } S_{\text{пол}} = 6(a^2 + b^2 + c^2) - 2S_{ab} - 2S_{bc} = 6(4 + 2,25 + 1) - \frac{24\sqrt{2} - 25}{2} - 2 = 54 - 12\sqrt{2}$$