Задача A. Выживание и шоколад

Автор задачи: Даниил Орешников, разработчик: Дмитрий Гнатюк

Заметим, что соединить можно шоколадки, у которых стороны равны, то есть, деля шоколадку пополам. Таким образом, если обозначить длину шоколадки за a, а ширину за b, можно сделать из (a, b) $(a \times 2, b/2)$ и $(a/2, b \times 2)$. То есть, в итоге одно число сократится на некоторую степень двойки, а другое умножится на эту же степень. Рассмотрим два варианта — если Джерри будет делить ширину или длину. Из полученных вариантов выберем, тот, в котором периметр максимальный.

Задача B. Ловушка для Джерри

Автор задачи и разработчик: Даниил Орешников

Для начала отметим какими способами можно было получить частичные баллы за решение отдельных групп тестов, а затем рассмотрим полное решение:

1. В первой подгруппе $n \cdot k$ не превосходит 10^5, что означает, что каждый запрос можно обрабатывать за $\mathcal{O}(n)$, просто целиком проходя по массиву.

2. В случае, когда $|a_i|$ изначально не превосходят 10, можно посчитать количество платформ каждой высоты в начальный момент времени, и аккумулировать суммарное изменение высот — тогда ответ на запрос суммы потребует один раз пройти по массиву количеств, который имеет размер 21.

3. Следующая группа уже достаточно приближена к полному решению. Во-первых, следовало отсортировать высоты платформ. Во-вторых, как и в предыдущей группе, мы не будем в явном виде изменять эти высоты, а будем в отдельной переменной `add` хранить, на какую величину высоты изменились с начального момента времени.

   Теперь стоит заметить, что если $a_i + \mathtt{add} < 0$, то соответствующая опасность равна $-(a_i + \mathtt{add})$, а иначе — $a_i + \mathtt{add}$. Таким образом, за счет того, что высоты платформ теперь отсортированы, для нескольких первых i будет использована первая формула, а для всех оставшихся — вторая. Если ровно для t первых элементов a выполняется, что $a_i < -\mathtt{add}$, мы получим формулу для суммарной опасности

   $$(-a_1 - \ldots - a_t - t \cdot \mathtt{add}) + (a_{t+1} + \ldots + a_n + (n - t) \cdot \mathtt{add})$$

   Суммы первых или последних a_i с нужным знаком можно получать за $\mathcal{O}(1)$, если заранее посчитать префиксные суммы на массиве a. Остается только вопрос: как быстро находить t? Для третьей группы было достаточно заметить, что если `add` не уменьшается, то t тоже не уменьшается, поэтому достаточно было завести указатель, и проверять, не надо ли его сдвинуть вправо, после каждого действия.

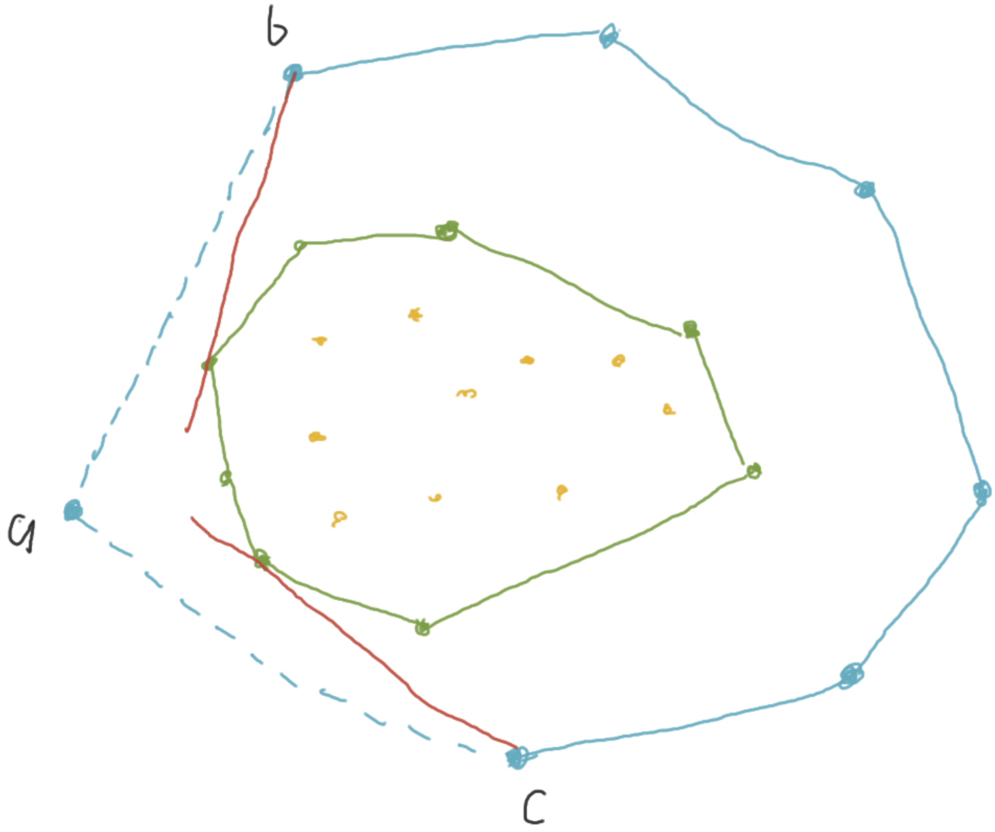
4. И это же приводит нас к полному решению — абсолютно все действия повторяем, как и в предыдущей группе, однако пользуемся двоичным поиском, чтобы искать это самое t (количество чисел, меньших $-\mathtt{add}$) при каждом запросе.

В конечном итоге мы получили решение с $\mathcal{O}(n \log n)$ времени на предподсчет (за счет сортировки массива) плюс $\mathcal{O}(k \log n)$ из-за двоичного поиска, используемого после каждого запроса.

Задача C. Мышеловки

Автор задачи и разработчик: Николай Будин

Найдем выпуклую оболочку множества точек. Очевидно, что если удалить точку не из выпуклой оболочки, то выпуклая оболочка не изменится, и её площадь не уменьшится. Значит, нужно удалять точку из выпуклой оболочки.



Если рассмотреть только точки, лежащие на выпуклой оболочке, и удалить одну из них (a), то в многоугольнике вершины, соседние с этой (b и c), образуют новую сторону. Однако, из такого многоугольника наружу будут «торчать» точки, которые раньше были внутри выпуклой оболочки. Найдем выпуклую оболочку точек, которые не лежат на выпуклой оболочке всего множества. Тогда нужно провести касательные к внутренней выпуклой оболочке из b и c.

Осталось научиться считать площадь такого многоугольника. Для вычисления площади многоугольника с вершинами в точках p_0, p_1, $\ldots p_{n-1}$ можно вычислить $\sum\limits_{i=0}^{n-1} p_i \times p_{(i+1) \bmod n}$, где $a \times b$ — векторное произведение векторов из 0 в a и в b.

Наш многоугольник состоит из двух частей, которые являются частями двух выпуклых оболочек. Для каждой выпуклой оболочки, используя префиксные суммы, можно вычислить необходимую сумму векторных произведений соседних точек. Затем, к этой сумме нужно прибавить еще два векторных произведения для мест, где соединяются часть одной выпуклой оболочки и часть другой.

Задача D. Джерри и задачи

Автор задачи: Даниил Орешников и Николай Будин, разработчик: Арсений Кириллов

Заметим, что нужно рассмотреть только ситуации, в которых выполнены несколько задач и все, от которых они зависят. Среди всех таких ситуаций надо посчитать минимальную полученную сумму, и противоположное этому значение и будет ответом.

Чтобы рассмотреть такие ситуации, посчитаем динамику $dp_{i,mask}$ — минимальная возможная сумма, если среди дел от i до $i+9$ выполнены только дела из $mask$. Чтобы перейти от i к $i+1$, надо рассмотреть дело $i+10$, и если все задачи, от которых он зависит, лежат в $mask$, то этот элемент можно добавить. Получается решение за $O(n \cdot 2^{10})$.