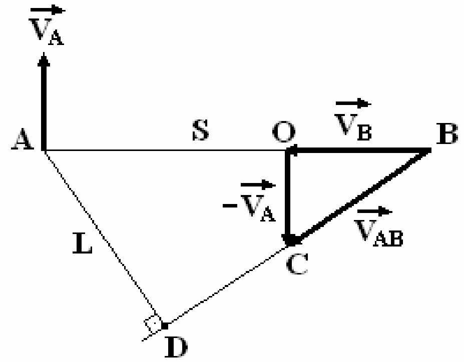
Задания и решения заключительного этапа Межрегиональной олимпиады школьников «Будущее инновационной России» Центрально-Черноземного экономического региона

Задача 10.1. Автобусы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ начинают движение одновременно со скоростями соответственно $\boldsymbol{V_A}$ и $\boldsymbol{V_B}$ во взаимно перпендикулярных направлениях. Расстояние между ними в начале движения равно $\boldsymbol{S}$. Найти минимальное расстояние между ними $\boldsymbol{L}$.

Решение:

Рассмотрим движение точки *B* в системе отсчета *A*.



$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \cdot \quad (1)$$

Откуда

$$\vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A \cdot$$

Из подобия треугольников ADB и OBC следует

$$\frac{S}{V_{BA}} = \frac{V_A}{L}, \quad (2)$$

где $V_{BA} = \sqrt{V_A^2 + V_B^2}$.

Тогда

$$L = \frac{V_A}{V_{BA}} \cdot S = \frac{V_A}{\sqrt{V_A^2 + V_B^2}} \cdot S. \quad (3)$$

Критерии оценки.

Выбор системы отсчета	4 балла
Векторное уравнение скоростей	2 балла
Подобие треугольников	2 балла
Расчетная формула	2 балла.

Задача 10.2. Цилиндр с газом общей массой **m**, высотой **h** и площадью основания **S** плавает в воде. В нижней части цилиндр потерял герметичность, и его глубина погружения увеличилась на четверть от **h**. Определите первоначальное давление газа в

цилиндре $\mathbf{p_1}$. Считать: газ не выходил из цилиндра, изменением температуры пренебречь, атмосферное давление $\mathbf{p_0}$, цилиндр тонкостенный.

Решение:

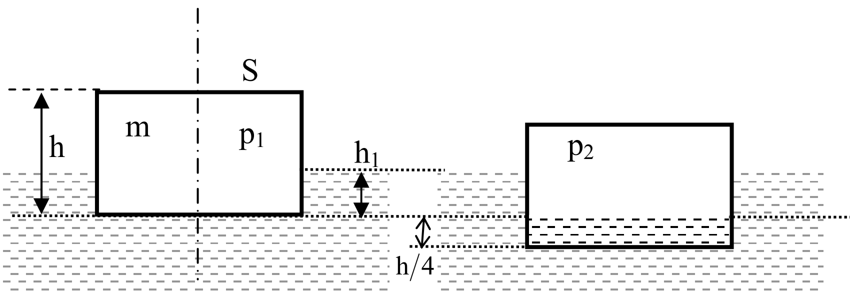
Согласно закону Архимеда, в первоначальном состоянии:

$$mg = h_1\rho Sg,$$

где ρ – плотность воды. Откуда первоначальная глубина погружения

$$h_1 = \frac{m}{\rho S}. \tag{1}$$

После просачивания воды и опускания цилиндра на $h/4$, с учётом тонкостенности цилиндра, получим, что увеличение силы Архимеда равно силе тяжести зашедшей воды. Т.е. вода в цилиндре будет иметь высоту тоже $h/4$.



Это видно из условия равновесия для конечного состояния:

$$mg + \frac{h\rho Sg}{4} = \left(h_1 + \frac{h}{4}\right)\rho Sg.$$

После упрощения получаем опять $mg = h_1\rho Sg$.

Так как по условию T = const, по закону Бойля-Мариотта:

$$p_1Sh = p_2S\left(h - \frac{h}{4}\right),$$

откуда

$$p_1 = \frac{3}{4}p_2. \tag{2}$$

Давление p_2 найдем из равенства давлений на уровне поверхности зашедшей в цилиндр воды (и равенства (1)):

$$p_2 = \rho gh_1 + p_0 = \frac{mg}{S} + p_0. \tag{3}$$

Окончательно из (2) и (3), получим:

Ответ: $p_1 = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{mg}{S} + p_0\right)$

Критерии оценки.

Первоначальная глубина погружения 2 балла
Закон Бойля-Мариотта 2 балла

Связь давлений (выраж (2))	2 балла
Выражение для конечного давления (3)	2 балла
Окончательный ответ	2 балла.

Задача 10.3. Смелый человек (кажется он называется джампером) массой $\boldsymbol{m_1}$, к ногам которого привязан резиновый жгут (банджи), прыгает вниз с высокого моста. Максимальная длина жгута при этом становится равной $\boldsymbol{l_1}$. Другой человек массой $\boldsymbol{m_2}$, действуя аналогично, растягивает жгут на длину $\boldsymbol{l_2}$. Чему равна жесткость $\boldsymbol{k}$ жгута?

Решение:

Воспользуемся законом сохранения энергии:

$$mgl = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2,$$

где l_0 – длина нерастянутого жгута.

Отсюда

$$l - l_0 = \sqrt{\frac{2mgl}{k}}.$$

Записывая два таких соотношения для двух случаев и вычитая их друг из друга, получим:

$$l_1 - l_2 = \sqrt{\frac{2m_1gl_1}{k}} - \sqrt{\frac{2m_2gl_2}{k}} \text{ и,}$$

окончательно,

$$k = 2g\left(\frac{\sqrt{m_1l_1} - \sqrt{m_2l_2}}{l_1 - l_2}\right)^2.$$

Критерии оценки.

Закон сохранения энергии	4 балла
Выражение для абсолютного удлинения жгута	2 балла
Исключение первоначальной длины жгута	2 балла
Окончательное выражение	2 балла.

Задача 10.4. Автомашина движется с постоянным ускорением $\boldsymbol{a}$ **= 0,62 м/с^2** по горизонтальной поверхности, описывая окружность радиуса $\boldsymbol{R}$ **= 40 м**. Коэффициент трения скольжения между колесами машины и поверхностью $\boldsymbol{k}$ **= 0,20**. Какой путь пройдет машина без скольжения, если в начальный момент ее скорость равна нулю?

Решение:

При ускоренном движении автомашины по окружности (шире школьной программы, но это же олимпиада) сила трения колес о дорогу обеспечивает как тангенциальную составляющую ускорения, так и нормальную. Причем, пока колеса автомашины не проскальзывают, это сила трения покоя, а её максимальное значение на горизонтальной дороге

$$F_{Tp} = kmg$$

определяет предельную скорость, с которой автомобиль может двигаться без скольжения

$$\vec{F}_{Tp} = m\vec{a} = m(\vec{a}_\tau + \vec{a}_n)$$

$$kmg = m\sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = m\sqrt{a_\tau^2 + \left(\frac{V^2}{R}\right)^2} = m\sqrt{a_\tau^2 + \frac{V^4}{R^2}}$$

$$V_{maz} = \left(R^2\left(\left(kg\right)^2 - a_\tau{}^2\right)\right)^{1/4}$$

Время, за которое машина приобретет эту скорость, равно

$$t = \frac{V_{\max}}{a_\tau},$$

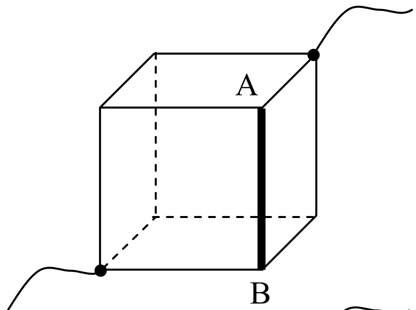
А путь, пройденный автомобилем к этому моменту времени

$$S = \frac{a_\tau t^2}{2} = \frac{V_{\max}^2}{2a_\tau} = \frac{\left(R^2\left(\left(kg\right)^2 - a_\tau{}^2\right)\right)^{1/2}}{2a_\tau} = \frac{R}{2}\sqrt{\left(\frac{kg}{a_\tau}\right)^2 - 1} = 60\text{ м.}$$

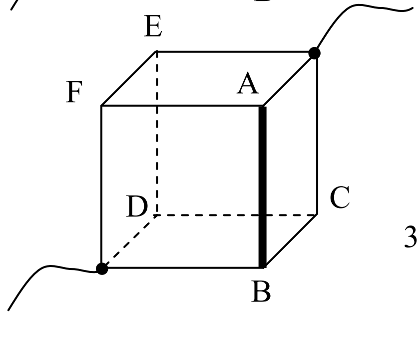
Критерии оценки.

Выражение для силы трения	2 балла
Выражение для максимальной скорости	4 балла
Выражение для времени разгона до макс. скорости	2 балла
Окончательное выражение для пути	2 балла.

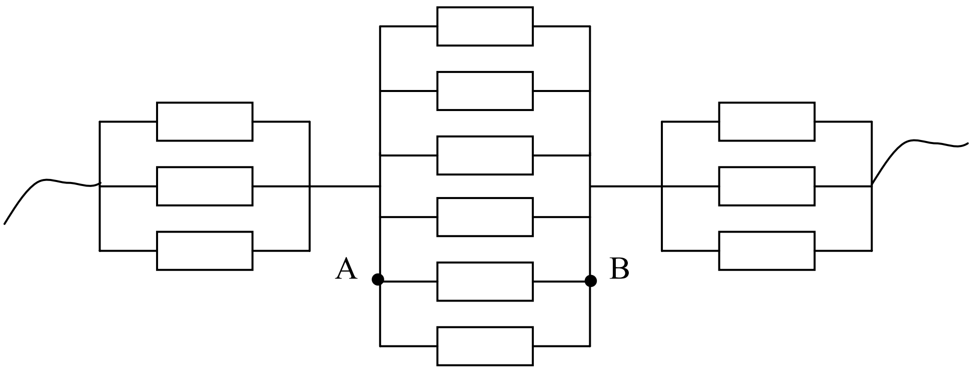
Задача 10.5. Из однородной проволоки спаяли куб. К двум противоположным вершинам большой диагонали данного куба подключили источник постоянного тока с ЭДС **42 В** и нулевым внутренним сопротивлением. Сопротивление куба между этими вершинами оказалось равным ***R* = 7 Ом**. Вычислите силу электрического тока через ребро **АВ** куба.



Решение:



Вершины B, F, D имеют одинаковый потенциал, поэтому их можно объединить в один узел. Аналогично вершины A, E, C. Поэтому куб при таком включении можно заменить эквивалентной схемой:



Общий ток равен:

$$J = \frac{\varepsilon}{r + R} = \frac{\varepsilon}{R} = 6A..,$$

поскольку все сопротивления равны, то после первого разветвления токи одинаковы и равны по 2 А. после второго по 1 А. Следовательно J_{AB} = 1 А.

Критерии оценки.

Объединение точек цепи с одинаковым потенциалом	2 балла
Построение эквивалентной схемы	2 балла
Выражение для общего тока	4 балла
Нахождение тока через ребро AB	2 балла.

10 КЛАСС

Задача 1

Оценить среднее расстояние между молекулами воздуха при нормальных условиях, считая его идеальным газом.

Решение:

$$P = nkT$$

Концентрация молекул

$$n = \frac{N}{V},$$

а объем одной молекулы

$$V_1 = \frac{V}{N} = \frac{1}{n} = \frac{kT}{P}$$

Полагая, что молекулы идеального газа это материальные точки располагающиеся в центре занимаемого ими объёма (кубика), находим расстояние между ними:

$$d = \sqrt[3]{\frac{kT}{P}} = \sqrt[3]{37.3 \cdot 10^{-27}} \approx 3.3 \cdot 10^{-9} \text{ м.}$$

Иначе:

$$V_1 = \frac{V_0}{N_A} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{22,4 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23}}} = \sqrt[3]{37.3 \cdot 10^{-27}} \approx 3.3 \cdot 10^{-9} \text{ м.}$$

Критерии оценки:

Нормальные условия *2 балла.*
Модель идеального газа *2 балла.*
Закон Авогадро *2 балла.*
Число Авогадро *2 балла.*
Соотношение между объемом приходящимся на одну молекулу и расстоянием между молекулами *2балла.*

Задача 2

Поток одинаковых частиц, движущихся со скоростью ***v*** и абсолютно неупруго ударяющихся о стенку, действует на нее с силой ***F***. Какое количество теплоты выделяется при этом за единицу времени?

Решение:

Пусть n – концентрация частиц в потоке, S – площадь стенки, а m – масса одной частицы. За время t на стенку падает $N = nSvt$ частиц, каждая из которых обладает импульсом $p = mv$. Модуль силы, действующей на стенку равен:

$$\left|\vec{\boldsymbol{F}}\right| = \frac{\left|\Delta\vec{\boldsymbol{p}}\right|}{\Delta t} = \frac{Nmv}{t} = nSmv^2 .$$

Количество теплоты, выделяющейся при этом за время t, равно:

$$Q_t = N \cdot \frac{mv^2}{2} = \frac{nSmv^3 t}{2},$$

а за единицу времени – $$Q_{ед} = \frac{nSmv^3}{2} = \frac{Fv}{2}.$$

Критерии оценки:

Второй закон Ньютона *2 балла.*
Изменение импульса *2 балла.*
Выражение изменения импульса через параметры потока частиц *2 балла.*
Закон сохранения энергии *2 балла.*
Выражение количества тепла через силу *2балла.*

Задача 3

На чашках весов установлены два одинаковых сосуда. Один из них наполнен сухим воздухом, другой – влажным. Температура и давление в сосудах одинаковы. Какой массы и на какую чашку весов нужно положить гирьку, чтобы уравновесить весы? Содержание влаги составляет **0,1 моль**. Молярные массы воздуха $\boldsymbol{M}$ **= 29 г/моль** и воды $\boldsymbol{M_0}$ **= 18 г/моль**.

Решение:

Пусть p_0 – парциальное давление паров воды в сосуде с влажным воздухом, p_1 – парциальное давление воздуха в нем, а p_2 – давление в сосуде с сухим воздухом. На основании закона Дальтона:

$$p_0 + p_1 = p_2.$$ *2 балла.*

Из уравнений Менделеева-Клапейрона:

$$p_0 V = \nu_0 RT, \quad p_1 V = \nu_1 RT, \quad p_2 V = \nu_2 RT$$ *2 балла.*

следует равенство

$$\nu_0 + \nu_1 = \nu_2.$$ *2 балла*

Масса влажного воздуха:

$$m_{влаж} = m_0 + m_1 = M_0 \nu_0 + M \nu_1,$$

масса сухого воздуха:

$$m_{сух} = m_2 = M \nu_2.$$

Разность масс составляет

$$m_{влаж} - m_{сух} = M_0 \nu_0 + M \nu_1 - M \nu_2 =$$

$$M_0 \nu_0 + M(-\nu_0) = (M_0 - M)\nu_0 = (18 - 29) \cdot 0{,}1 = -1{,}1 \text{ г.}$$ *2 балла.*

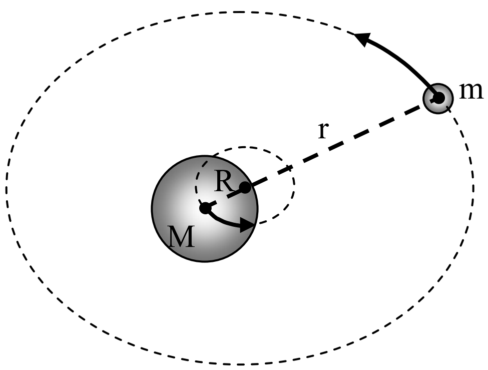
Таким образом, делаем вывод: сосуд с влажным воздухом оказался легче, следовательно, нужно положить на эту же чашку гирьку массой 1,1 г. *2 балла.*

Задача 4

Звезда массой ***M*** и планета массой ***m*** обращаются вокруг общего центра масс по круговым орбитам. Каково отношение радиусов орбит звезды и планеты, скоростей звезды и планеты, периодов обращения звезды и планеты. Другие планеты и звезды не учитывать.

Решение:

Так как тела вращаются вокруг общего центра (эта точка является центром масс системы), то в любой момент времени они находятся на диаметрально противоположных относительно этого центра точках окружностей. Тогда из условия вращения (см. рисунок):



$$mr = MR;$$

2 балла

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega;\ T_1 = T_2 \quad (T = 2\pi/\omega).$$ *2 балла*

Для силы взаимодействия получаем:

$$F = ma_п = Ma_з = G\frac{Mm}{(R+r)^2}$$ *2 балла*

Для планеты:

$$m\omega^2 r = G\frac{Mm}{(R+r)^2};\ \frac{\omega^2 r}{M} = \frac{G}{(R+r)^2}.$$ *2 балла*

Для звезды:

$$M\omega^2 R = G\frac{Mm}{(R+r)^2};\ \frac{\omega^2 R}{m} = \frac{G}{(R+r)^2}.$$ *2 балла*

Откуда:

$$\frac{\omega^2 r}{M} = \frac{\omega^2 R}{m};\ \frac{r}{R} = \frac{M}{m}.$$ *2 балла*

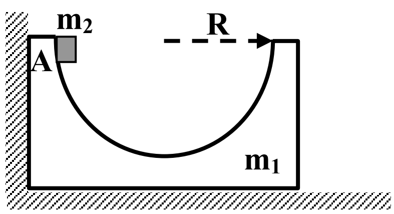
Так как $\omega = \frac{V_п}{r} = \frac{V_з}{R}$, то $\frac{V_п{}^2}{rM} = \frac{V_з{}^2}{Rm};\ \frac{V_п{}^2}{V_з{}^2} = \frac{rM}{Rm} = \frac{M^2}{m^2}$,

$$\frac{V_п}{V_з} = \frac{M}{m}$$ *2 балла*

Окончательно: $\frac{V_п}{V_з} = \frac{r}{R};\ \frac{V_п}{r} = \frac{V_з}{R};\ \omega_1 = \omega_2;\ T_1 = T_2$ *2 балла*

Задача 5

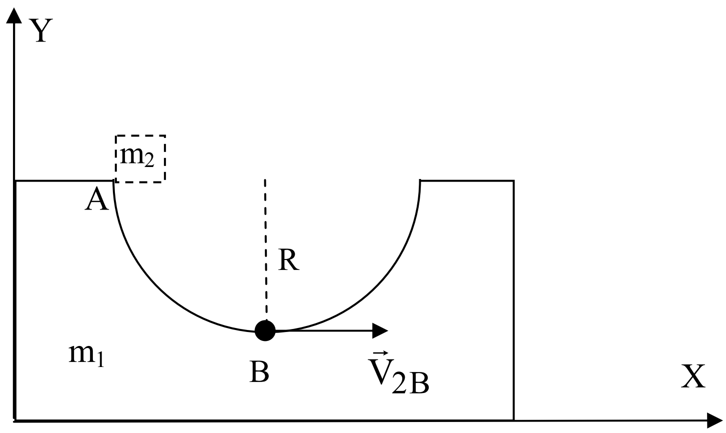
На гладкой горизонтальной поверхности около стенки стоит симметричный брусок массы $\boldsymbol{m_1}$ с углублением полусферической формы радиуса $\boldsymbol{R}$. Из точки **A** без трения и начальной скорости соскальзывает маленькая шайба массой $\boldsymbol{m_2}$. На какую высоту поднимется шайба от нижней точки углубления?

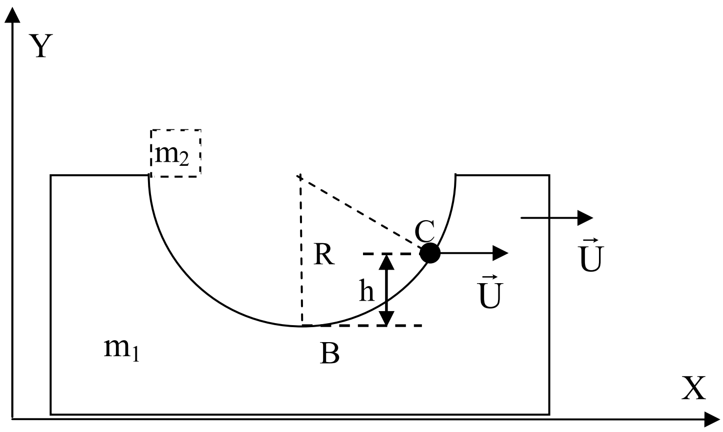


Решение

При движении от шайбы A к B брусок давит на стену, поэтому система брусок-шайба не замкнута. $P \neq \mathrm{const}$. После прохожде-ния шайбой точки B брусок начинает двигаться вправо ($\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$), растрачивая энергию шайбы. Поэтому C ниже A. *2 балла.*

После прохождения шайбой точки B система брусок-шайба становится замкнутой и для неё выполняются законы сохранения (на левую стенку брусок больше не давит). *2 балла.*





$$\vec{P} = m_2 \vec{V}_{2B} = \mathrm{const};$$

$$m_2 gR = \frac{m_2 V_{2B}^2}{2}$$

Брусок ещё не движется.

$$V_{2B} = \sqrt{2gR}.$$

2 балла

Для точки C:

$$\begin{cases} m_2 gR = m_2 gh + \dfrac{(m_1 + m_2)U^2}{2} \\ m_2\sqrt{2gR} = (m_1 + m_2)U \end{cases}.$$ *2 балла*

Решаем систему:

$$m_2 gh = m_2 gR - \frac{m_1 + m_2}{2}\left(\frac{m_2\sqrt{2gR}}{m_1 + m_2}\right)^2 = m_2 gR - \frac{m_2^2 2gR}{2(m_1 + m_2)} =$$

$$= m_2 gR\left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) = m_2 gR\left(\frac{m_1 + m_2 - m_2}{m_1 + m_2}\right)$$

$$h = R\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right).$$ *2 балла*

10 класс.

Задача 10.1. В кухне развесили много выстиранного белья. На улице моросит холодный осенний дождь. Быстрее ли высохнет белье, если открыть форточку?

Решение. Давление водяного пара при комнатной температуре выше, чем давление насыщенного водяного пара на улице. Скорость сушки белья зависит только от относительной влажности воздуха. При открытой форточке пар будет выходить из кухни, при этом относительная влажность воздуха в кухне будет понижаться, и, следовательно, белье будет сохнуть быстрее.

Критерии оценки.

Давление водяного пара	4 балла
Скорость сушки	3 балла

Относительная влажность 3 балла

Задача 10.2. Шарик из пластилина с прикрепленной к нему одной спичкой опускается в жидкости с ускорением a. Шарик с двумя спичками поднимается с таким же ускорением a. Одна спичка без шарика поднимается с ускорением $4a$. С каким ускорением опускается один шарик? Силой вязкого трения и сопротивлением движению можно пренебречь.

Решение:

Пусть масса шарика m_1, масса спички m_2. Обозначим результирующую силу (сумму силы тяжести и силы Архимеда), действующую на шарик в жидкости, F_1, силу, действующую на спичку в жидкости, F_2, а искомое ускорение шарика a_x. Учитывая, что сила F_1 направлена вниз, а сила F_1 $(F_2,)$– вверх, запишем уравнения третьего(второго) закона Ньютона для всех четырех случаев:

$F_1 = m_1 a_x$; 2 балла $F_2 = 4m_2 a$; 2 балла $F_1 - F_2 = (m_1 + m_2)a$; 2 балла

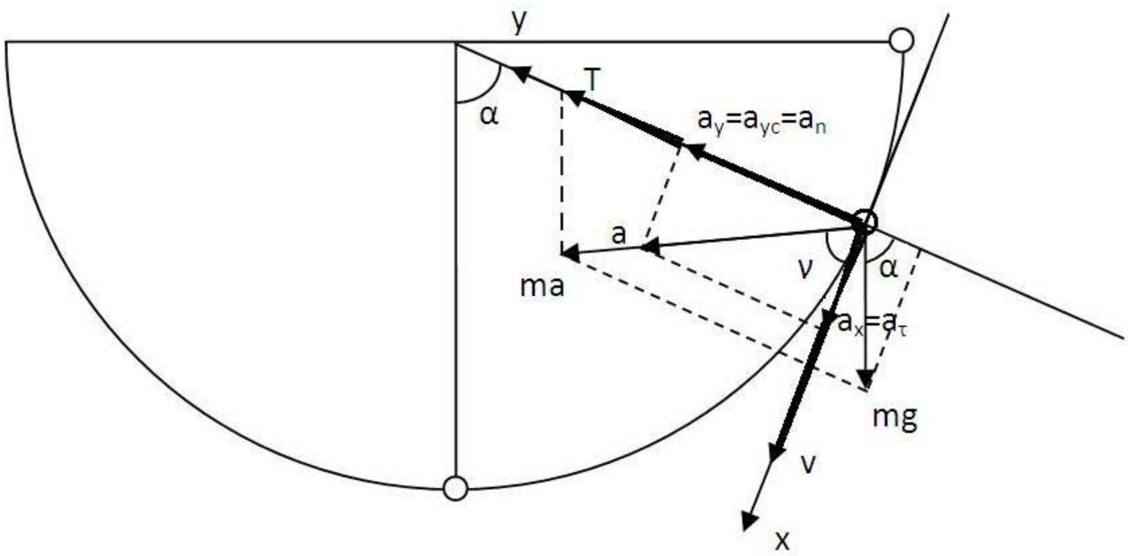
$2F_2 - F_1 = (m_1 + 2m_2)a$ 2 балла .

После простых преобразований получим ответ: $a_x = 11a$.

2 балла

Задача 10.3 Груз массой m привязан к нити. Нить с грузом отвели от вертикали на угол 90^0 и отпустили. Для момента времени, когда нить образует с вертикалью угол 60^0 определить: силу натяжения нити, ускорение и угол между ускорением и скоростью.

Решение



$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$

x: $mg\sin\alpha = ma_x$

$y: T - mg\cos\alpha = ma_y = ma_{цс}$ 2 балла

$T = mg\cos\alpha + ma_{цс} \quad a_{цс} - ? \quad a_{цс} = \dfrac{V^2}{l}$

Закон сохранения энергии для первого и второго положений груза

$$mgl = mgh + \frac{mV^2}{2}, h = l - l\cos\alpha, \frac{mV^2}{2} = mgl - mg(l - l\cos\alpha) = mgl\cos\alpha$$

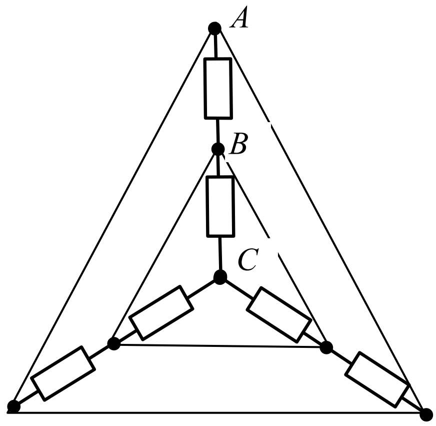
$a_{цс} = \dfrac{V^2}{l} = 2g\cos\alpha$ 2 балла

$T = mg\cos\alpha + ma_{цс} = mg\cos\alpha + 2mg\cos\alpha = 3mg\cos\alpha = \dfrac{3mg}{2}$ 2 балла

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(g\sin\alpha)^2 + (2g\cos\alpha)^2} = \sqrt{g^2(1 + 3\cos^2\alpha)} = \dfrac{g\sqrt{7}}{2}$ 2 балла

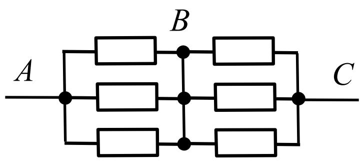
$tg\gamma = \dfrac{a_y}{a_x} = \dfrac{2g}{g\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \quad \gamma = \text{arctg}\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 2 балла

Задача 10.4. Чему равно сопротивление между узлами A и B, A и C схемы, изображенной на рисунке? Сопротивление каждого резистора R.



Решение:

Данную схему можно преобразовать к следующему виду:



Теперь непосредственно видно, что $R_{AB} = \dfrac{1}{3}R$, а $R_{AC} = \dfrac{2}{3}R$.

Критерии оценки.

Понимание, какие точки имеют одинаковый потенциал-4 балла.

Преобразование схемы - 4 балла.

Расчет -2балла.

Задача 10.5. На сколько процентов вес тела на экваторе меньше чем на полюсе. . Различием радиусов Земли на экваторе и на полюсе пренебречь и считать его равным 6400км..

Решение.

$$\text{\textit{На полюсе}}: \quad P_1 = N_1 = mg \qquad \text{2 балла}$$

$$\text{\textit{На экваторе}}: \; P_2 = N_2 \qquad mg - N_2 = ma_{цс} \qquad \text{2 балла}$$

$$N_2 = mg + ma_{цс} = mg + ma_{цс} = m(g + \frac{V^2}{R}) = m(g + \omega^2 R) =$$

$$= m(g + \frac{4\pi^2}{T^2}R) \quad \Delta P = P_2 - P_1 = \frac{4m\pi^2 R}{T^2} \qquad \text{4 балла}$$

$$x = \frac{\Delta P}{P_1}100\% = \frac{4\pi^2 R}{T^2 g}100\% = 2\%(\text{\textit{Проверить}}!) \qquad \text{2 балла}$$