Решения по математике 10-11 класс
(Заключительный этап) 2016 год

2 Вариант

1.

$$\begin{cases} XY + YZ = 8 \\ YZ + XZ = 9 \\ XZ + XY = 5 \end{cases}$$

Сложим левые и правые части уравнений системы: xy + xz + yz = 11 (разделили обе части на «2»)

Из полученного уравнения поочередно вычитаем уравнения системы:

$$\begin{cases} xy = 2 \\ xz = 3 \\ yz = 6 \end{cases}$$

перемножив между собой эти три уравнения, получим:

$x^2y^2z^2 = 36$ или xyz = $\pm$ 6

Если xyz = 6, то $x_1 = \frac{6}{yz}$; $y_1 = \frac{6}{xz}$; $z_1 = \frac{6}{xy}$.

$x_1 = 1$; $y_1 = 2$; $z_1 = 3$.

Если xyz = -6, то:

$x_2 = \frac{-6}{yz} = -1$; $y_2 = \frac{-6}{xz} = -2$; $z_2 = \frac{-6}{xy} = -3$.

Ответ: (1;2;3); (-1;-2;-3)

2.

S = $\frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \ldots + \frac{n}{5^n} + \ldots$

5S = $1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \ldots + \frac{n}{5^{n-1}} + \ldots$

4S = $1 + (\frac{2}{5} - \frac{1}{5}) + (\frac{3}{5^2} - \frac{2}{5^2}) + \ldots + (\frac{n}{5^{n-1}} - \frac{n-1}{5^{n-1}}) + \ldots = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^{n-1}} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$

Ответ: $\mathbf{\frac{5}{16}}$

3.
Каждой точке пересечения диагоналей соответствуют четыре вершины семиугольника, а каждой четверке вершин семиугольника соответствует одна точка пересечения. Поэтому число всех точек пересечения диагоналей равно числу способов, которыми среди семи вершин можно выбрать четыре вершины, т.е. $C_7^4 = \frac{7*\cancel{6}*5*4}{1*\cancel{2*3}*4} = 35$ – это число точек пересечения диагоналей.

4.
$6\sin x - 2\cos^3 x = \frac{5*2sin2x*cos2x*cosx}{2cos2x} \Rightarrow$ уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 6\,sinx - 2\,cos^3x = 5sin2x * cosx \\ cos2x \neq 0 \end{cases}$$

$6sinx * (cos^2x + sin^2x) – 2\,cos^3x – 10sinx * cos^2x = 0$
$6sinx * cos^2x + 6sin^3x - 2cos^3x – 10sinx * cos^2x = 0$
$6sin^3x - 2cos^3x – 4snx * cos^2x = 0$
$3sin^3x - cos^3x - 2sinx * cos^2x = 0 : cos^3x \neq 0$
$3tg^3x – 2\,tgx - 1 = 0$
$tgx = y \Rightarrow 3y^3 - 2y – 1 = 0$
$(3y^3 - 3y) + (y – 1) = 3y*(y – 1)*(y + 1)+(y – 1) = (y – 1)*(3y^2 + 3y + 1) = 0$
$3y^2 + 3y + 1 = 0$ – нет действительных корней
$Y – 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow tgx = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon z,$ но $cos^2x \neq 0 \Rightarrow$ при $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $\cos 2x = 0 \Rightarrow \underline{x \in \emptyset}$

5.
1. Поставим четырехугольную пирамиду $A_1BB_1C_1C$, в которую вписан шар, на основание BB_1C_1C. Пусть H – высота пирамиды, а – сторона ее основания. Радиусы окружностей с центрами O и O_1 равны R.
2. $\Delta B_1A_1C_1$ - правильный $\Rightarrow a=2\sqrt{3}R$.
   Рассмотрим $\Delta\, DA_1E$ – прямоугольный => его площадь $S=\frac{1}{2}A_1D*DE$ и $S\Delta DA_1E = \frac{R}{2}(A_1D+DE+A_1E)$
3. $DE = H$, $A_1D = a*\frac{\sqrt{3}}{2}$, $A_1E = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + H^2}$
   $S = \frac{1}{2} * a*\frac{\sqrt{3}}{2} * H = \frac{ah\sqrt{3}}{4}$
   $s = \frac{R}{2}\left(a*\frac{\sqrt{3}}{2} + H + \sqrt{\frac{3a^2}{4} + H^2}\right)$; $a=2\sqrt{3}R \Rightarrow S = \frac{2\sqrt{3}\quad H\sqrt{3}\quad *R}{4} = \frac{6HR}{4} = \frac{3HR}{2}$ и

S = $\frac{R}{2} * (2\sqrt{3}R * \frac{\sqrt{3}}{2} + H + \sqrt{\frac{3*4*3R^2}{4}} + H^2)$

$\frac{3HR}{2} = \frac{3R^2}{2} + \frac{RH}{2} + \frac{R}{2}\sqrt{9R^{2+H^2}}$

$H\cancel{R} - \frac{3R^{\cancel{2}}}{2} = \frac{\cancel{R}}{2} \cdot \sqrt{9R^{2+H^2}}$ => 2H – 3R = $\sqrt{9R^{2+H^2}}$

$4H^2 - 12$ HR+ $9R^{\cancel{2}} = 9R^{\cancel{2}} + H^2$ => $3H^2$= 12 HR=>H = 4R => V призмы =

= $4R \cdot 2\sqrt{3}R \cdot \cancel{2}\sqrt{3}R \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 12\sqrt{3}\,R^3$