Конкурсные задания Олимпиады МЭСИ для школьников 2011/2012 гг.
9-11 классы

1. Решить неравенство:

$$x^4 - x^3 - 2x^2 - 3x - 1 < 0$$

Ответ: $x \in \left(1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right)$

2. Вычислить сумму:

$$S = 1 + \frac{1}{2^3-2} + \frac{1}{3^3-3} + ... + \frac{1}{100^3-100}$$

Ответ: $S = \dfrac{25249}{20200}$

3. При каком значении q один из корней уравнения $63x^3 + 54x^2 + qx - 24 = 0$ равен сумме всех корней?

Ответ: $q = -28$

4 Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} |3x-4y-2| \le 24 - |3x+4y-10| \\ x^2 - 4x - 20 \ge 2y - y^2 \end{cases}$$

Ответ: (6;4), (6;-2), (-2;4) и (-2;-2)

5. Прямая, параллельная основанию АС треугольника АВС пересекает его стороны АВ и ВС в точках, соответственно, M и N. Отрезок MN делит площадь треугольника АВС на части, относящиеся, считая от вершины В, так же как MN относится к АС. Найти длину отрезка MN, если основание АС равно $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Ответ: $MN = 1$

Дополнительно для 10 класса:

6. В окружность радиуса R вписаны квадрат и правильный треугольник, имеющие общую вершину. Найти площадь их общей части.

$$S_{BM1N1NM} = \frac{R^2(8\sqrt{3}-9)}{4}$$

Ответ:

Дополнительно для 11 класса:

5. Высоты треугольника, площадь которого больше нуля, являются тремя последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найти все значения, которые может принимать знаменатель прогрессии q.

Ответ: $q \in \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)$

6. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ рассечена плоскостью, проходящей через ребро AB нижнего основания и вершину C_1 верхнего основания на две части. В каждую и частей вписаны сферы. Найти отношение радиусов сфер, вписанных в верхнюю и нижнюю части призмы.

Ответ: $\frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{3}$