Ключи к варианту № 1

1. Решение. Положим $\sin x = t$ и заметим, что
$\frac{t}{1+\sqrt{1+t}} = \sqrt{1+t} - 1$, т.е. дробь слева равна $\sqrt{1+t} - 1$, а уравнение имеет вид
$\sqrt{1+t} = 0$, т.е. $t = -1$. Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

2. Решение. Квадратный трехчлен, стоящий в числителе, имеет корни $a-5$ и 2. Так как корень 2 числителя является решением исходного уравнения при любом a, то необходимое значение параметра ищется, как решение совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} a-5=2 \\ 6(a-5)^2+4(a-5)-1 \le 0 \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{28-\sqrt{10}}{6} \le a \le \frac{28+\sqrt{10}}{6}$ и $a = 7$.

3. Очевидно, все числа неотрицательны. Пусть
$x \ge y \ge z \Rightarrow x - z \ge y - z \Rightarrow (x-z)^6 \ge (y-z)^6 \Rightarrow y \ge x \Rightarrow y = x \Rightarrow x = x^6 \Rightarrow x = 0, x = 1$
.

4. Решение. В круге радиуса n помещается $3n^2+3n+1$ точка.

5. Решение. $y = \frac{u^4+u^2+5}{u^4+2u^2+1}$. Положим $u^2+1=t>0$. $y = \frac{5}{t^2} - \frac{1}{t} + 1 = 5(\frac{1}{t} - \frac{1}{10})^2 + 0{,}95$.

Для $u = arctgx$ наименьшее значение не достигается, т.к. $-\frac{\pi}{2} < arctgx < \frac{\pi}{2}$.

6. Решение. Рассмотрим в пространстве 3 различные параллельные прямые, не лежащие в одной плоскости. Пусть d_1, d_2, d_3 - расстояния между ними, и $d_1 < d_2 < d_3$ (случаи равенства - тривиальны). Пусть сторона равностороннего треугольника, если такой существует, равна x, тогда
$\sqrt{x^2-d_1^2} = \sqrt{x^2-d_2^2} + \sqrt{x^2-d_3^2}$. Положив $x^2 = t$, приходим к квадратному уравнению, имеющему положительный корень
$t = \frac{(d_1^2+d_2^2+d_3^2)+2\sqrt{\frac{1}{2}(d_1^2-d_2^2)^2+\frac{1}{2}(d_2^2-d_3^2)^2\frac{1}{2}(d_3^2-d_1^2)^2}}{3}$. Случай, когда прямые лежат в одной плоскости, рассматривается аналогично.