Юные таланты
Олимпиада Пермского государственного национального исследовательского университета

ОЛИМПИАДА ПО ГЕОЛОГИИ

Задания для 10-11 классов

Развернутые ответы с решением задач Вы оформляете на отдельных листах.
У Вас есть 120 минут.
Пользоваться шпаргалками, сотовыми телефонами, книгами не разрешается.
Разговаривать с другими участниками запрещается.
Указывать Фамилию Имя Отчество на бланке для ответов нельзя.
В левом верхнем углу листа с решением задач необходимо проставить свой личный код,
а в правом верхнем углу – номер задания.
Правильность выполнения каждого задания оценивается в 10 баллов.

Желаем Вам удачи!

Задача 1.

При разведке залежи углеводородов сейсморазведкой были зарегистрированы отраженные сигналы от кровли и подошвы залежи с интервалом Δt = 20 мс. Определите толщину залежи h, если скорость сейсмических волн в пределах залежи V_2 = 2000 м/с, а в вышележащей толще V_1 =4000 м/с. Исходный сигнал падает на кровлю залежи под углом $\alpha = 30^0$.

Ответ: $h \approx 19.4$ м

Решение:

1. Сигнал, отраженный от кровли залежи распространяется по траектории ***SAB***, отраженный от подошвы залежи - по траектории ***SACDE*** (рис.1).
2. Согласно закону отражения угол падения равен углу отражения, а угол падения α и угол преломления β связаны соотношением:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{V_1}{V_2}. \qquad (1).$$

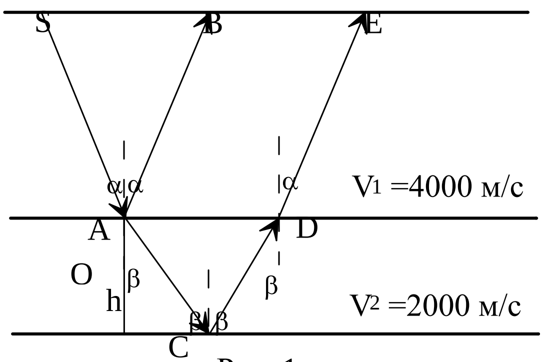

Рис. 1

Отсюда ***AB*** = ***DE*** и различие Δt времен регистрации отраженного сигнала от кровли и подошвы залежи определяется временем пробега сигнала по участку пути ***ACD:***

$$\Delta t = \frac{AC}{V_2} + \frac{CD}{V_2}.$$

3. С учетом равенства углов β падения и отражения сигнала от подошвы залежи ***AC*** = ***CD,*** а из прямоугольного треугольника ***AOC*** получим

$$AC = \frac{h}{\cos\beta}.$$

Тогда $\Delta t = \dfrac{2h}{V_2 \cdot \cos\beta}$ и

$$h == \frac{\Delta t \cdot V_2 \cdot \cos\beta}{2} \quad . \qquad (2)$$

4. Вычислим β из уравнения (1)

$$\beta = \arcsin\left(\sin\alpha \cdot \frac{V_2}{V_1}\right),$$

a. $= \arcsin(\sin 30^0 \cdot 2000/4000) \approx 14.5^0$,

5. Тогда уравнение (2) примет вид:

$$h \approx \frac{20 \cdot 10^{-3} \cdot 2000 \cdot \cos 14.5^0}{2} \approx 19.4(м).$$

Задача 2.

Вода в искусственном водоеме удерживается дамбой высотой 12 м и шириной 30 м (рис. 2). Определить среднее давление воды на дамбу, если уровень воды находится на расстоянии 3 м от верхнего края дамбы. Как изменится давление, если уровень воды поднимется на 1 м? Плотность воды принять равной 1 г/см^3.

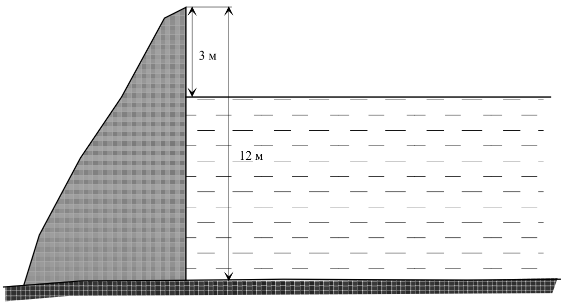

Рис. 2

Ответ: среднее давление на дамбу составляет≈44,1 кн/м^2. При подъеме уровня воды на 1 м увеличение среднего давления на дамбу составит ≈ 4,9 кн/м^2.

Решение:

1. Давление на открытой поверхности воды (на расстоянии 3 м от верха дамбы):

$P_1 = 0$.

2. Давление на дне водоема:

$P_2 = \sigma \cdot g \cdot h$,

где σ – плотность воды, h – высота воды у дамбы, g –ускорение силы тяжести.

$P_2 = 1 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 9 \approx 88{,}2 \cdot 10^3$н/м^2.

3. Среднее давление на дамбу:

$P_{ср} = (P_1+P_2)/2$.

$P_{ср} \approx 44{,}1 \cdot 10^3$н/м^2 ≈44,1 кн/м^2.

4. Если уровень воды повысится на 1 м, то высота воды у дамбы составит h=10 м, а давление воды на дне водоема определится как:

$P_2' = 1 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 10 = 98 \cdot 10^3$н/м^2.

5. В этом случае среднее давление определится как

$P_{ср}' = (P_1+ P_2')/2$.

$P_{ср}' = 49 \cdot 10^3$ н/м^2 =49кн/м^2.

6. Тогда увеличение среднего давления на дамбу:

$\Delta P_{ср} = (P_{ср}' - P_{ср})$.

$\Delta P_{ср} \approx (49 - 44{,}1) \approx 4{,}9$ (кн/м^2).

Задача 3.

Образец горной породы, имеющий форму прямого кругового цилиндра, усечен непараллельно основанию таким образом, что плоскость, проведенная через ось цилиндра, определяет образующие цилиндра как h = 10 см и H = 20 см (рис. 3). Вычислите площадь боковой поверхности S и объем V усеченного цилиндра, если диаметр образца D = 10 см.

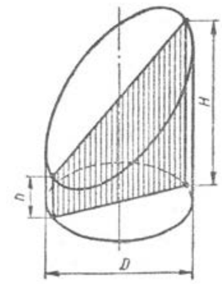

Рис. 3

Ответ: S≈ 471 см^2 и V≈ 4712см^3.

Решение

1. Дополним усеченный цилиндр до полного цилиндра высотой H+h (рис. 4).

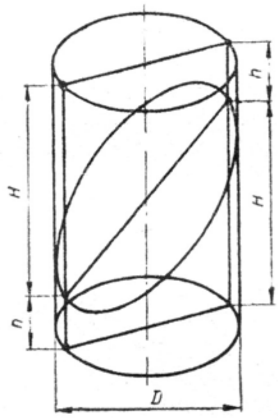

Рис. 4

2. Очевидно, что дополненная часть представляет собой также усеченный цилиндр, центрально симметричный заданному. Поэтому оба усеченных цилиндра равны. Отсюда боковая поверхность и объем одного усеченного цилиндра равны половине соответственно боковой поверхности и объема всего цилиндра высотой $H+h$.
3. Площадь боковой поверхности кругового цилиндра:
$S_0 = \pi D(H+h)$;
объем цилиндра:
$$V_0 = \frac{\pi D^2}{4}(H+h)$$
4. Отсюда:
$S = \frac{1}{2}S_0 = \frac{1}{2}\pi D(H+h)$;
$V = \frac{1}{2}V_0 = \frac{\pi D^2}{2}(H+h)$.
$S = \frac{1}{2}\pi \cdot 10(20+10) = 150\pi \approx 471$ (см^2);
$$V = \frac{\pi 10^2}{2}(20+10) = 1500\pi \approx 4712(\text{см}^3).$$

Задача 4.

Решить неравенство: $lg(x^2+3x-2) > lg|x+1|$.

Ответ: $x < -2-\sqrt{5}$ и $x > 1$.

Решение:

Поскольку основания логарифмов в правой и левой частях неравенства равны, то
$x^2+3x-2 > |x+1|$.(1)

1. При $x > -1$ неравенство (1) примет вид:

$x^2+3x-2>x+1.$ (2)

Отсюда

$x^2+2x-3>0$……………………………………….(3)

Найдем корни уравнения $x^2+2x-3=0.$

$x=-1\pm\sqrt{1+3}$

$x_1=1$ $x_2=-3$

Тогда неравенство (3) можно представить:

$(x-1)(x+3)>0.$ (4)

Неравенство (4) выполняется в 2 случаях.

а) $\begin{cases}x-1>0\\x+3>0\end{cases}\begin{cases}x>1\\x>-3\end{cases}$ $x>1$

б) $\begin{cases}x-1<0\\x+3<0\end{cases}\begin{cases}x<1\\x<-3\end{cases}$ $x<-3$ - не входит в область определения неравенства (2)

2. При $x<-1$ неравенство (1) примет вид:

$x^2+3x-2>-x-1.$ (5)

Отсюда

$x^2+4x-1>0$ ……………………………………….(6)

Найдем корни уравнения $x^2+4x-1=0.$

$x=-2\pm\sqrt{4+1}$

$x_1=-2+\sqrt{5}$ $x_2=-2-\sqrt{5}$

Тогда неравенство (3) можно представить:

$(x+2-\sqrt{5})(x+2+\sqrt{5})>0.$(7)

Неравенство (7) выполняется в 2 случаях.

а) $\begin{cases}x+2-\sqrt{5}>0\\x+2+\sqrt{5}>0\end{cases}\begin{cases}x>-2+\sqrt{5}\\x>-2-\sqrt{5}\end{cases}$ $x>-2+\sqrt{5}$ - не входит в область определения неравенства (5)

б) $\begin{cases}x+2-\sqrt{5}<0\\x+2+\sqrt{5}<0\end{cases}\begin{cases}x<-2+\sqrt{5}\\x<-2-\sqrt{5}\end{cases}$ $x<-2-\sqrt{5}$

Задача 5.

Решить уравнение: $\boldsymbol{sinx+3cosx=1.}$

<u>Ответ</u>: $x=\frac{\pi}{2}\pm2\pi n$ и $x=2arctg\frac{1}{2}\pm2\pi n$ (n=1, 2, 3…).

<u>Решение:</u>

1. Проведем замену

$sinx=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$; $cosx=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$.

2. Получим:

$$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} + 3\,\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 1. \qquad (2)$$

3. Если $tg\frac{x}{2} \neq -1$, т.е. $\frac{x}{2} \neq arctg(-1) + \pi n$или $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$при $n = 1{,}2, \ldots$, то уравнение (2) примет вид:

$$2tg\frac{x}{2} + 3\left(1 - tg^2\frac{x}{2}\right) = 1 + tg^2\frac{x}{2}.$$

$$2tg^2\frac{x}{2} - tg\frac{x}{2} - 1 = 0. \qquad (3)$$

4. Найдем корни квадратного уравнения (3):

$$tg\frac{x}{2} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\cdot 2}}{4}$$

$$\left(tg\frac{x}{2}\right)_1 = 1; \qquad \left(tg\frac{x}{2}\right)_2 = \frac{1}{2}.$$

5. Отсюда:

1) $\frac{x}{2} = arctg1 \pm \pi n$

$$x = \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$$

2) $\frac{x}{2} = arctg\frac{1}{2} \pm \pi n$

$$x = 2arctg\frac{1}{2} \pm 2\pi n$$