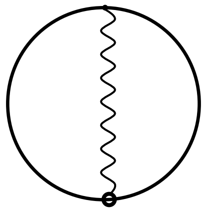
Решения и критерии оценивания решений задач

Заключительного тура олимпиады «Росатом», 2021-2022 учебный год,

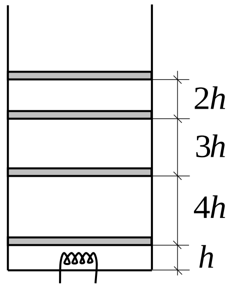
физика, 11 класс

1. Во льду сделали очень длинный прямой желоб и на равных расстояниях $l = 40$ см расположили цепочкой одинаковые тела. Первому телу цепочки сообщили скорость $v_0 = 1,3$ м/с в направлении всех остальных тел. Сколько тел сдвинется с места, если коэффициент трения между телами и льдом равен $\mu = 0,02$? Столкновения тел абсолютно упругие, размеры тел очень малы. Считать, что количество тел в цепочке очень велико, и $g = 10$ м/с^2. Ответ обосновать.

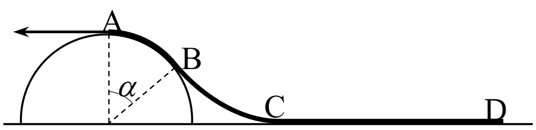
2. Из проволоки сделали кольцо радиуса R, расположили в вертикальной плоскости и закрепили в таком положении. К верхней точке кольца прикреплен один конец невесомой пружины. Второй конец пружины прикреплен к массивной бусинке, которая может без трения скользить по кольцу. Если поместить бусинку в нижнюю точку кольца (см. рисунок), она давит на кольцо с силой вдвое превышающей силу ее притяжения к земле. Из-за небольшого смещения бусинка начинает скользить по кольцу, причем ее скорость достигает максимума, когда она проходит по кольцу шестую часть его полной длины. Найти длину пружины в недеформированном состоянии.



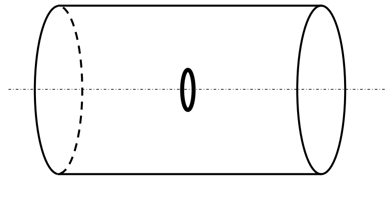
3. В открытом вертикальном цилиндрическом сосуде с одноатомным идеальным газом находятся четыре одинаковых тонких массивных подвижных поршня массой m каждый. Расстояния между поршнями и между нижним поршнем и дном сосуда равны h, $2h$, $3h$ и $4h$ (см. рисунок). В некоторый момент времени включается нагреватель, расположенный между дном сосуда и нижним поршнем, и медленно сообщает газу количество теплоты Q. На сколько сместится верхний поршень, если поршни (за исключением верхнего) проводят тепло, стенки сосуда и верхний поршень тепло не проводят, теплоемкостью сосуда и поршней можно пренебречь. Атмосферное давление отсутствует.



4. Однородную нерастяжимую веревку, лежащую на горизонтальной поверхности, медленно втягивают на гладкий полушар, закрепленный на поверхности, действуя на ее конец некоторой силой. Когда конец веревки A оказывается в верхней точке полушара, веревка касается полушара участком AB, опирающимся на угол α, а длина «висящего» участка веревки BC втрое меньше ее участка CD, лежащего на поверхности (см. рисунок). Найти коэффициент трения между веревкой и поверхностью. Какой горизонтальной силой нужно в этот момент действовать на конец веревки A, если масса веревки m, масса куска CD - m_{CD}?



5. Из гибкого диэлектрика изготовили длинный тонкостенный цилиндр радиуса R и равномерно зарядили его положительным зарядом с поверхностной плотностью σ. Внутрь цилиндра перпендикулярно его оси вставили диэлектрическое колечко радиуса r и массой m, центр которого совпадает с осью цилиндра и которое заряжено положительным зарядом с линейной



плотностью заряда λ. Цилиндр раскручивают до угловой скорости ω. Найти угловую скорость колечка.

Решения

1. Из законов сохранения энергии и импульса следует, что при центральных упругих столкновениях тел одинаковых масс тела обмениваются скоростями. В частности, если тело, движущееся со скоростью v, налетает на покоящееся тело той же массы, то после центрального упругого столкновения первое тело остановится, а второе будет двигаться со скоростью v. Это значит, что картина движения наших тел является такой.

Сначала движется первое тело, и его движение до столкновения со вторым телом замедляется силой трения.

После столкновения со вторым, первое останавливается, а второе будет двигаться с его предыдущей скоростью. До столкновения с третьим телом сила трения уменьшит его скорость.

После столкновения с третьим телом второе остановится, а третье будет двигаться с его скоростью.

И т.д.

Таким образом, в каждый момент времени в системе тел движется только одно тело, причем с такой скоростью, до какой сила трения успела затормозить движение тел. Расстояние, на котором это движение полностью прекратиться, легко найти с использованием теоремы об изменении кинетической. Поскольку тела точечные и при каждом ударе предыдущее тело передает свою скорость последующему, то, несмотря на то, что сила трения тормозит разные тела, торможение движения силой трения происходит так, как будто движется одно тело. Поэтому теорема об изменении кинетической энергии дает для полного торможения

$$0-\frac{mv_0^2}{2}=-\mu mgS$$

где m - масса тел, v_0 - начальная скорость первого тела, μ - коэффициент трения между телом и желобом, S - расстояние от точки, в которой начало движение первое тело, до точки остановки последнего. Отсюда находим, что движение остановится на расстоянии

$$S=\frac{v_0^2}{2\mu g}$$

от начальной точки. А поскольку расстояние между всеми телами l, то в движение будут вовлечены следующее количество тел

$$n=\left[\frac{S}{l}\right]=\left[\frac{v_0^2}{2\mu gl}\right]$$

где $[...]$ - целая часть. Или

$$n=10$$

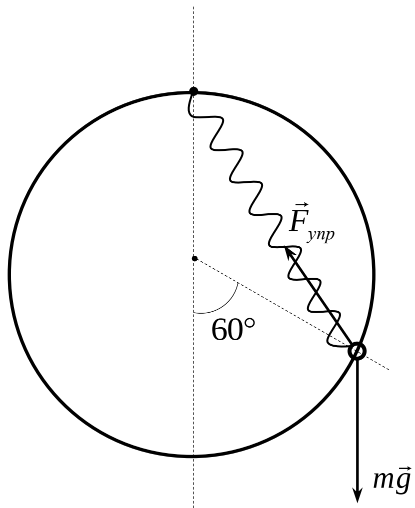
Критерии оценивания решения задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Обосновано, что при центральном упругом столкновении тел одинаковой массы они меняются скоростями - 0,5 балла
2. Правильно найден тормозной путь одного тела – 0,5 балла
3. Правильная идея решения – суммарный путь, пройденный всеми телами, равен тормозному пути одного тела – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

2. Пусть коэффициент жесткости пружины равен k, длина в недеформированном состоянии l_0. Очевидно, в начальном положении растянута, и сила упругости равна $F_{упр} = 3mg$ (чтобы обеспечить давление бусинки на кольцо с силой, вдвое превышающей ее силу тяжести). Поэтому

$$k\left(2R - l_0\right) = 3mg \tag{1}$$

С другой стороны, движение бусинки вдоль кольца определяется составляющими сил упругости и тяжести, направленными вдоль касательной к кольцу, причем вначале составляющая силы упругости разгоняет, а составляющая силы тяжести – тормозит движение бусинки. Поэтому скорость движения бусинки по кольцу достигнет максимума, когда составляющая силы упругости сравняется с составляющей силы тяжести (см. рисунок). По условию это произойдет, когда бусинка пройде третью часть полукольца, т.е. направление на бусинку составит угол $60°$ с вертикалью (см. рисунок). Находя соответствующие проекции, получим для этого положения



$$F_{упр}\cos 60° = mg\cos 30°$$

причем длина пружины в этом положении будет равна $2R\cos 30°$. Поэтому условие максимальности скорости бусинки дает

$$k\left(2R\frac{\sqrt{3}}{2} - l_0\right)\frac{1}{2} = mg\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{2}$$

Деля уравнение (1) на уравнение (2) и решая полученное уравнение, найдем длину пружины в недеформированном состоянии l_0:

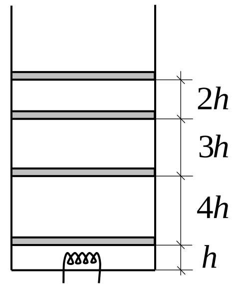
$$l_0 = \frac{R}{\sqrt{3}-1} = 1,37R$$

Критерии оценивания решения задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильно использован закон Гука - 0,5 балла
2. Правильно найдена (из сравнения проекций сил упругости и тяжести или по закону сохранения энергии) точка кольца, где скорость бусинки максимальна – 0,5 балла
3. Правильное условие максимальности скорости бусинки – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

3. Поскольку тепло подводится медленно, поршни в любой момент времени находятся в равновесии. Поэтому давление газа в каждом отсеке остается неизменным в течение всего процесса. Это значит, что с газом в отсеках сосуда происходит изобарический процесс при давлениях, которые определяются условиями равновесия поршней:

$$p_1 = \frac{mg}{S} = p, \quad p_2 = \frac{2mg}{S} = 2p, \quad p_3 = \frac{3mg}{S} = 3p, \quad p_4 = \frac{4mg}{S} = 4p \qquad (1)$$

где p_1, p_2, p_3 и p_4 - давления газа в отсеках сосуда, начиная с верхнего, m - масса поршня.



Поскольку процесс, происходящий с газом в отсеках сосуда, - изобарический, а температура газа в отсеках меняется одинаково, то отношение объемов газов при их расширении сохранится. Это значит, что отношение объемов отсеков сосуда (начиная с верхнего) будет таким же, как и до нагревания

$$V_1' : V_2' : V_3' : V_4' = 2 : 3 : 4 : 1$$

Здесь V_1', V_2', V_3', V_4' - объемы отсеков сосуда (начиная с верхнего) после нагревания. А это в свою очередь означает, что так же относятся и изменения объемов отсеков сосуда

$$\Delta V_1 : \Delta V_2 : \Delta V_3 : \Delta V_4 = 2 : 3 : 4 : 1$$

Поэтому если нижний поршень сместится при нагревании вверх на величину Δx, то второй снизу сместится на $5\Delta x$, третий снизу – на $8\Delta x$, верхний – на $10\Delta x$:

$$\Delta x_1 = 10\Delta x, \quad \Delta x_2 = 8\Delta x, \quad \Delta x_3 = 5\Delta x, \quad \Delta x_4 = \Delta x \qquad (2)$$

Используем теперь первый закон термодинамики. Поскольку процессы, происходящие с газом – изобарические, то количество теплоты, которое сообщается газу при его расширении на ΔV есть $Q = (5/2)p\Delta V$, то для указанного изменения их объемов необходимо следующее количество теплоты

$$Q = \frac{5}{2}\left(p_1\Delta V_1 + p_2\Delta V_2 + p_3\Delta V_3 + p_4\Delta V_4\right)$$

Используя теперь формулы (1) и (2), получим

$$Q = \frac{5}{2}p\left(\Delta V_1 + 2\Delta V_2 + 3\Delta V_3 + 4\Delta V_4\right) = \frac{5}{2}pS\left(2\Delta x + 6\Delta x + 12\Delta x + 4\Delta x\right)$$

(S - площадь сечения сосуда). Отсюда находим величину Δx

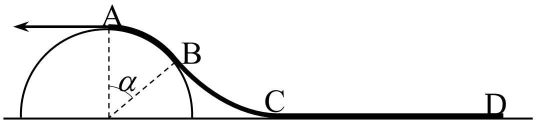
$$\Delta x = \frac{Q}{60mg},$$

а затем и смещение верхнего поршня

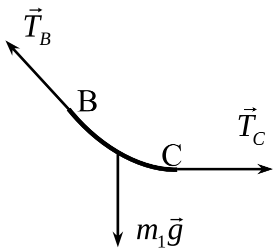
$$\Delta x_{верх} = \frac{Q}{6mg}$$

Критерии оценивания решения задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Понято, что процесс, происходящий с газом – изобарический, и потому отношение изменений объемов отсеков при нагревании равно отношению первоначальных объемов - 0,5 балла
2. Правильно найдены смещения всех поршней – 0,5 балла
3. Правильное использование первого закона термодинамики для процесса в каждом отсеке – 0,5 балла
4. Правильный ответ для смещения верхнего поршня – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

4. Поскольку веревку втягивают медленно, в каждый момент $\vec{T}_в$ времени сумма сил, действующих на нее (и на любую ее часть) равна нулю, но сила трения равна своему максимальному значению.



Рассмотрим условие равенства нулю сил, действующих на «висящий» кусок веревки ВС. На него действуют: сила тяжести $m_1\vec{g}$ (m_1 - масса куска веревки ВС), сила натяжения в точке В $\vec{T}_B$ и сила натяжения в точке С $\vec{T}_C$ (см. рисунок). Условие равенства нулю суммы сил в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси дает



$$\begin{aligned} T_B \sin\alpha &= m_1 g \\ T_B \cos\alpha &= T_C \end{aligned} \qquad (1)$$

Отсюда находим

$$T_C = m_1 g \operatorname{ctg}\alpha \qquad (2)$$

На лежащий конец веревки CD действуют сила натяжения в точке С (по величине такая же как (2), но противоположно направленная, сила тяжести $m_2\vec{g}$ (m_2 - масса куска веревки CD), сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$, причем величина последней силы равна своему максимальному значению μN. Условие равенства нулю суммы сил, действующих на кусок CD в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси дает

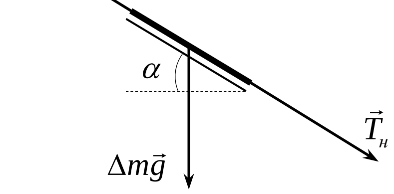
$$\begin{aligned} N &= m_2 g \\ T_C &= \mu N \end{aligned}$$

Отсюда и формулы (1) находим

$$m_1 \operatorname{ctg}\alpha = \mu m_2$$

или

$$\mu = \frac{m_1}{m_2} \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3} \operatorname{ctg}\alpha$$



Чтобы найти силу, с которой в этот момент действовать на точку А рассмотрим условие равенства нулю всех сил, действующих на участок АВ. Поскольку различные элементы этого участка по-разному взаимодействуют с полушаром, разобьем этот участок на малые элементы, запишем условие равенства нулю сил, действующих на каждый элемент. Для элемента, лежащего на кусочке полушара, наклоненном под углом φ в проекциях на ось, направленную вдоль элемента, получим

$$T_в - T_н = \Delta mg\sin\alpha$$

(где Δm - масса этого элемента, $T_в$ и $T_н$ - силы натяжения сверху и снизу рассматриваемого элемента. Если просуммировать такие соотношения для всех элементов участка веревки, лежащего на полушаре, сократятся все силы, кроме искомой силы F в точке А и силы натяжения в точке В. Сумму величин $\Delta mg\sin\alpha$ для всех элементов веревки можно вычислить так. Массу элемента можно представить как $\Delta m = \lambda\Delta l$, где λ - линейная плотность веревки. А сумма величин $\Delta l\sin\alpha$ есть проекция участка АВ на вертикальное направление. Поэтому эта сумма есть

$$R - R\cos\alpha = R(1-\cos\alpha)$$

Поэтому условие равенства нулю суммы сил, действующих на элемент АВ дает

$$F = T_B + \lambda Rg(1-\cos\alpha)$$

Линейную плотность веревки λ можно выразить через массу веревки, лежащей на полушаре

$$m_{AB} = \lambda\alpha R$$

(α задан в радианах). Отсюда находим

$$F = T_B + \frac{m_{AB}g(1-\cos\alpha)}{\alpha}$$

С другой стороны, из формул (1)-(2) получаем

$$T_B = \frac{1}{3}\frac{m_{CD}g}{\cos\alpha}$$

А массу участка АВ найдем как

$$m_{AB} = m - m_{CD} - m_{BC} = m - m_{CD} - \frac{1}{3}m_{CD} = \frac{3m-4m_{CD}}{3}$$

Отсюда получаем окончательно

$$F = \frac{1}{3}\frac{m_{CD}g}{\sin\alpha} + \frac{(3m-4m_{CD})g(1-\cos\alpha)}{3\alpha}$$

Критерии оценивания задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильное условие равновесия куска веревки ВС - 0,5 балла
2. Правильно найдена сила натяжения веревки в точке В – 0,5 балла
3. Правильное условие равновесия куска веревки на полушаре – 0,5 балла
4. Правильный ответ для силы, с которой нужно действовать на конец веревки, находящийся в верхней точке полушара – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

5. Заряды, распределенные по диэлектрику, будут двигаться по окружностям. Это приведет к возникновению внутри цилиндра магнитного поля. Это поле можно найти, используя аналогию между вращающимся заряженным цилиндром и током в соленоиде. Как известно, внутри соленоида, по которому течет ток I, создается однородное магнитное поле, индукция которого направлена вдоль оси соленоида и равна по величине

$$B = \mu_0 nI$$

где n - число витков на единицу длины соленоида, μ_0 - магнитная постоянная. Произведение nI в формуле (1) имеет смысл заряда, переносимого в единицу времени через единицу длины соленоида. При вращении заряженного с поверхностной плотностью заряда σ цилиндра через единицу длины в единицу времени переносится заряд $\sigma v = \sigma R\omega$. Поэтому индукция магнитного поля внутри цилиндра (когда его раскрутят до угловой скорости ω) будет равна

$$B = \mu_0 \sigma R\omega$$

При раскручивании цилиндра магнитное поле будет меняться, и внутри цилиндра возникнет вихревое электрическое поле, которое будет действовать на заряды колечка. А поскольку колечко диэлектрическое, движение этих зарядов приведет к движению самого колечка. Найдем силы, которые действуют на заряды колечка.

Благодаря осевой симметрии магнитного поля вихревое электрическое поле также будет обладать осевой симметрией – оно будет зависеть от расстояния до оси цилиндра и направлено по касательным к окружностям, охватывающим ось цилиндра. Работа вихревого поля над единичным зарядом при его движении по такой окружности есть ЭДС индукции. Поэтому по закону электромагнитной индукции имеем

$$2\pi rE(r) = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \pi r^2 \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

где $E(r)$ - напряженность вихревого электрического поля на расстоянии r от оси цилиндра, $\Delta B/\Delta t$ скорость изменения индукции магнитного поля внутри цилиндра. Отсюда находим

$$E(r) = \frac{1}{2} r \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{1}{2} r \mu_0 \sigma R \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

На каждый элемент колечка с зарядом Δq действует следующая сила

$$\Delta F = \Delta q E(r) = \frac{1}{2} r \Delta q \mu_0 \sigma R \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

что дает следующее ускорение

$$a = \frac{\Delta F}{\Delta m} = \frac{1}{2} r \frac{\Delta q}{\Delta m} \mu_0 \sigma R \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Поскольку ускорения у всех элементов колечка будут одинаковы, таким же будет и ускорение всего колечка

$$a = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \sigma R r q}{m} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Такое ускорение у колечка будет в течение всего времени раскручивания цилиндра. Умножая ускорение на малые элементы времени, на которые можно разделить время раскручивания цилиндра, можно найти изменение скорости колечка за это время, а складывая все эти изменения, скорость $v_к$, которую приобретут точки колечка и его угловую скорость $\omega_к$

$$v_к = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 \sigma R r q}{m}\omega, \qquad \omega_к = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 \sigma R q}{m}\omega$$

Согласно правилу Ленца направление индукции собственного магнитного поля колечка должно быть пропорционально направлению магнитного поля цилиндра. А поскольку заряды цилиндра и колечка – одного знака, колечко будет вращаться в сторону, противоположную направлению вращения цилиндра.

Критерии оценивания задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильно найдена индукция магнитного поля внутри вращающегося цилиндра – 0,5 балла
2. Правильно найдена напряженность вихревого электрического поля в точках колечка – 0,5 балла
3. Правильно найдено ускорение, с которым раскручивается колечко в процессе раскручивания цилиндра – 0,5 балла
4. Правильный ответ для угловой скорости колечка – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

Оценка работы
Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 10 баллов. Допустимыми являются все целые или «полуцелые» оценки от 0 до 10.

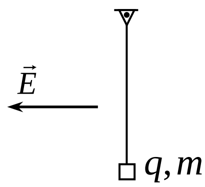
Решения и критерии оценивания решений задач

Заключительного тура олимпиады «Росатом», 2021-2022 учебный год,

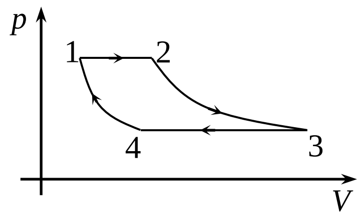
физика, 11 класс

1. Два тела бросили из одной точки поверхности земли с одинаковыми начальными скоростями под разными углами к горизонту. Тела упали в одну и ту же точку через время t и $2t$ после броска. Под каким углом к горизонту бросили первое тело?

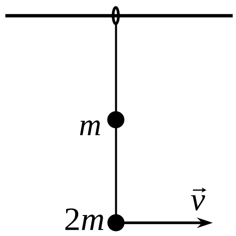
2. На невесомой нерастяжимой нити длиной l подвешено маленькое тело массой m с зарядом q. На очень короткое время τ включается горизонтальное электрическое поле. При какой минимальной напряженности электрического поля $\vec{E}$ тело совершит полный оборот, двигаясь в вертикальной плоскости по окружности с центром в точке крепления нити. Конструкция крепления нити не мешает телу вращаться в вертикальной плоскости вокруг точки крепления нити.



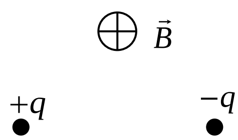
3. С идеальным одноатомным газом происходит циклический процесс 2-2-3-4-1, состоящий из двух изобар (1-2 и 3-4) и двух изотерм (2-3 и 4-1). Температура газа на изотерме 2-3 втрое больше температуры на изотерме 4-1. Известно, что количество теплоты, полученное газом на участке 2-3 вдвое больше количества теплоты, полученного газом на участке 1-2. Найти термодинамический КПД цикла.



4. Очень легкое колечко может без трения скользить по горизонтальному стержню. К колечку с помощью двух невесомых нерастяжимых нитей длиной l прикреплены два тела массами m и $2m$ (см. рисунок). Какую минимальную горизонтальную скорость v нужно сообщить нижнему телу, чтобы в процессе последующего движения тела могли оказаться на одной и той же высоте.



5. Две частицы с одинаковыми массами m и зарядами q и $-q$ ($q > 0$) удерживают на расстоянии l друг от друга в однородном магнитном поле, которое перпендикулярно отрезку, соединяющему частицы. Частицы отпускают. При какой минимальной индукции магнитного поля $\vec{B}$ частицы не столкнутся? На какое минимальное расстояние в этом случае сблизятся частицы?



Решения

1. Пусть первое тело бросили под углом α , второе под углом β . Дальность полета тела, брошенного с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту, определяется соотношением

$$l = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

Чтобы дальность полета для разных углов α и β совпадала, нужно, чтобы

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$$

Далее, из формулы для времени движения имеем

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \text{ и } 2t = \frac{2v_0 \sin\beta}{g} = \frac{2v_0 \cos\alpha}{g}$$

Деля эти формулы друг на друга, получим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \alpha = \operatorname{arctg}(1/2)$$

Критерии оценивания решения задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Использована правильная формула для дальности полета - 0,5 балла
2. Правильная связь углов бросания первого и второго тела – 0,5 балла
3. Правильная формула для времени полета – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

2. Поскольку время включения электрического поля мало, то тело за время включения-выключения поля приобретет скорость, но не успеет переместиться. Скорость, которую приобретет тело в горизонтальном направлении, найдем по второму закону Ньютона

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{qE\Delta t}{m} \tag{1}$$

Далее тело двигается на нити по окружности в вертикальной плоскости. Чтобы тело прошло верхнюю точку, двигаясь по окружности, должен быть выполнен закон движения по окружности. Учитывая, что в верхней точке на тело действуют сила тяжести и сила натяжения нити, направленные вниз, закон вращательного движения дает

$$\frac{mv_1^2}{l} = T + mg$$

где v_1 - скорость тела в верхней точке. Минимальной скорости, при которой тело пройдет верхнюю точку, двигаясь по окружности, отвечает случай $T = 0$ (при меньшей скорости инерция не удержит тело на окружности, и сила тяжести заставит его сойти с окружности). Отсюда

$$v_1 = \sqrt{gl}$$

Используя далее закон сохранения энергии,

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - 2mgl$$

найдем минимальную скорость тела в нижней точке, при которой оно пройдет верхнюю точку

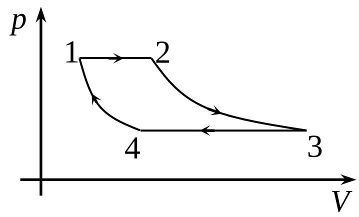
$$v = \sqrt{5gl}$$

Отсюда и формулы (1) находим минимальную напряженность электрического поля, при которой тело пройдет верхнюю точку, двигаясь по окружности

$$E_{\min} = \frac{m\sqrt{5gl}}{q\Delta t}$$

Критерии оценивания решения задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильно найдена скорость, которую приобретает тело за время действия электрического поля – 0,5 балла
2. Правильно найдена минимальная скорость тела в верхней точке, при которой тело эту точку проходит при натянутой нити – 0,5 балла
3. Правильно использован закон сохранения энергии для движения тела на нити – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

3. Найдем количества теплоты, полученные газом на каждом участке процесса. Пусть на участке 2-3 газ получил количество теплоты $Q_{2-3} = Q$. На участке 1-2 газ получил (по условию) - $Q_{1-2} = Q/2$. Поскольку количество теплоты, полученное в изобарическом процессе определяется только разностью температур вначале и в конце процесса, но не зависит от давления, то количество теплоты, полученное газом в процессе 3-4, равно $Q_{3-4} = -Q/2$. Докажем, что в процессе 4-1 газ получил количество теплоты $Q_{4-1} = -Q/3$. Действительно, поскольку процессы 2-3 и 4-1 изотермические, внутренняя энергия газов не менялась: $\Delta U_{2-3} = \Delta U_{4-1} = 0$. Поэтому



$$Q_{2-3} = A_{2-3},\ Q_{4-1} = A_{4-1} \tag{1}$$

где A - работа газа в соответствующих процессах. Очевидно, работа, совершенная газом в этих процессах отличается (помимо знака) в три раза. Действительно, работа есть сумма произведений

$$p\Delta V$$

где p - давление газа, ΔV - малое изменение объема при этом давлении. Но поскольку температуры отличаются на изотермах втрое, то объемы (и их изменения) при каждом давлении отличаются также втрое. Поэтому, если работа газа в процессе 2-3 равна

$$A_{2-3} = A$$

то, работа газа в процессе 4-1 равна

$$A_{4-1} = -\frac{1}{3}A$$

Отсюда и имеем сделанное выше утверждение. Поэтому работа газа в течение цикла равна

$$A = Q_{1-2} + Q_{2-3} + Q_{3-4} + Q_{4-1} = \frac{2}{3}Q$$

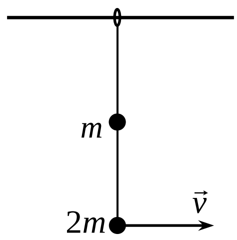
Количество теплоты, полученное от нагревателя, есть количество теплоты, полученное в процессах 1-2 и 2-3

$$Q_н = \frac{1}{2}Q + Q = \frac{3}{2}Q$$

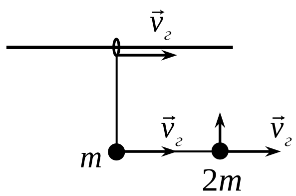
Отсюда находим КПД цикла

$$\eta = \frac{A}{Q_н} = \frac{4}{9} = 44\%$$

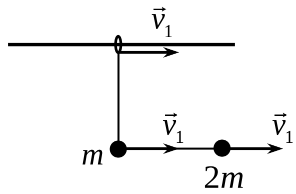
Критерии оценивания решения задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильное определение термодинамического КПД теплового двигателя – 0,5 балла
2. Правильное соотношение количеств теплоты, полученных газом в процессах 4-1 и 2-3 – 0,5 балла
3. Правильно найдена работа газа за цикл – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям



4. При сообщении нижнему телу какой-то скорости нити начнут смещаться, и заставят двигаться и среднее тело, и колечко. При этом, поскольку по условию масса колечка очень мала, сумма сил, действующих на него в любой момент времени должна быть равна нулю (или, другими словами, любое его движение может быть вызвано бесконечно малой силой). То есть картина движения тел при сообщении нижнему телу скорости, направленной вправо, является такой – из-за инерции среднего тела нижнее начнет подниматься вверх, в результате сила натяжения нижней нити заставит среднее тело двигаться вправо. За ним будет двигаться и колечко, но для его движения сила не нужна, поэтому скорости верхнего тела и колечка будут в любой момент времени одинаковыми, верхняя нить вертикальна, а среднее тело будет двигаться горизонтально.



При достаточно большой скорости v, сообщенной нижнему телу, оно поднимется до высоты, на которой находится среднее тело, имея при этом и горизонтальную, и вертикальную составляющую скорости (см. рисунок). В этот момент среднее тело будет иметь скорость, направленную горизонтально, и совпадающую с горизонтальной составляющей нижнего тела. Такой же будет и скорость колечка.



Минимальной скорости, сообщенной вначале нижнему телу, отвечающей подъему тел на одну и ту же высоту, отвечает ситуация, когда вертикальная составляющая скорости нижнего тела в момент его подъема на одну высоту со средним, равна нулю (см. рисунок). Поскольку горизонтальных внешних сил, действующих на систему тел, нет, то сохраняется проекция импульса системы на горизонтальное направление. Поэтому

$$2mv = 3mv_1 \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \frac{2}{3}v \qquad (1)$$

где v_1 - скорости нижнего и среднего тела в момент подъема нижнего на одну высоту со средним. Используя теперь закон сохранения энергии, получим

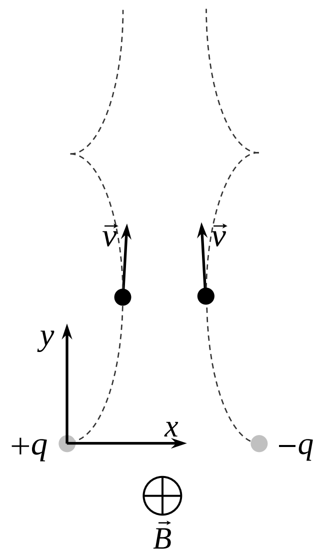
$$\frac{2mv^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{2mv_1^2}{2}+2mgl$$

Отсюда и формулы (1) находим

$$v=\sqrt{6gl}$$

Критерии оценивания решения задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Использовано (и обосновано) условие вертикальности верхней нити в процессе движения тел – 0,5 балла
2. Использовано (и обосновано) правильное условие минимальности скорости нижнего тела внизу для подъема тел на одинаковую высоту – 0,5 балла
3. Правильное уравнение закона сохранения энергии для движения тел – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

4. Благодаря кулоновскому притяжению частицы будут сближаться, и величины их скоростей будут расти. При этом на них будет действовать и магнитная составляющая силы Лоренца, которая будет поворачивать «вверх» скорости частиц. При этом, чем сильнее сблизятся частицы и чем, соответственно, больше будут их скорости, тем больше будут магнитные составляющие сил Лоренца.



Если магнитное поле очень сильное, то оно развернет скорости частиц параллельно друг другу, а затем начнет «отодвигать» их друг от друга, побеждая силу кулоновского притяжения. Для очень малого магнитного поля траектории частиц будут отклоняться от прямолинейных, но магнитное поле не сможет «победить» кулоновское притяжение. Это значит, что в случае, когда частицы не сталкиваются, будет реализовываться следующая ситуация: магнитное поле развернет частицы так, что их скорости будут параллельны друг другу, и в этом положении магнитная составляющая силы Лоренца будет компенсировать силу кулоновского притяжения.

Найдем минимальное расстояние, на которое сближаются частицы. Введем координатные оси x и y. Второй закон Ньютона для каждой из частиц имеет вид

$$m\vec{a}=\vec{F}_{кул}+\vec{F}_{лор}$$

В проекциях на ось y (см. рисунок) это уравнение для частицы с зарядом $+q$ дает

$$ma_y=qv_xB \qquad (1)$$

где a_y - проекция вектора ускорения частицы на ось y, v_x - проекция ее скорости на ось x. Уравнение (1) справедливо в любой момент времени при том, что проекции ускорения и скорости частицы изменяются. Поэтому, если умножить уравнение (1) в каждый момент времени на малый интервал времени Δt около этого момента и просуммировать за все моменты времени от начала до некоторого момента времени t, получим

$$m\left(a_{y,1}\Delta t_1+a_{y,2}\Delta t_2+a_{y,3}\Delta t_3+...\right)=qB\left(v_{x,1}\Delta t_1+v_{x,2}\Delta t_2+v_{x,3}\Delta t_3+...\right)$$

Сумма в скобках слева есть изменение проекции скорости частиц на ось y от $t=0$ до t. А поскольку начальная скорость равна нулю, то эта сумма равна проекции скорости на ось y в момент времени t. Сумма в скобках справа есть изменение x-координаты частицы за это время. А поскольку начальная x-координата заряда $+q$ равна нулю (см. рисунок), то это его x-координата в этот момент. Таким образом, между проекцией скорости заряда на ось y и его x-координатой есть следующая связь

$$mv_y = qBx \tag{2}$$

(аналогичная связь имеет место и для отрицательно заряженной частицы). При этом в точке максимального сближения частиц их скорости будут направлены по оси y, т.е. проекция скорости на ось y равна модулю скорости.

Последнюю величину можно найти по закону сохранения энергии:

$$2\frac{mv^2}{2} = -\frac{kq^2}{d} + \frac{kq^2}{d-2x} \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{2xkq^2}{md\left(d-2x\right)}} \tag{3}$$

Таким образом, формула (2) для координаты положительно заряженный частицы в точке максимального сближения частиц (в случае, когда они не сталкиваются) дает

$$m\sqrt{\frac{2xkq^2}{md\left(d-2x\right)}} = qBx \tag{4}$$

или

$$\sqrt{\frac{2km}{d\left(d-2x\right)x}} = B \tag{5}$$

Формула (5) дает связь координаты x положительно заряженной частицы в точке максимального сближения частиц, и индукции магнитного поля, которое развернет их скорости параллельно друг другу. Формула (5) сводится к квадратному уравнению относительно координаты x, положительно заряженной частицы в точке максимального сближения частиц

$$x^2 - \frac{d}{2}x + \frac{km}{B^2} = 0 \tag{6}$$

Решая квадратное уравнение (6), получим

$$x_{1,2} = \frac{d}{4} \pm \sqrt{\frac{d^2}{16} - \frac{km}{B^2}} \tag{7}$$

Из формулы (7) следует, что уравнение (6) имеет решение (т.е. существует такое расстояние x, пройденное частицами, когда их скорости становятся параллельными), если

$$\frac{d^2}{16} - \frac{km}{B^2} > 0 \tag{8}$$

или

$$B \geq 4\sqrt{\frac{km}{d^3}} \qquad (9)$$

Это условие и определяет минимальное магнитное поле, разворачивающее скорости частиц

$$B_{\min} = 4\sqrt{\frac{km}{d^3}} \qquad (10)$$

причем при таком магнитном поле частицы сближаются на расстояние

$$d - 2x = \frac{d}{2} \qquad (11)$$

Обратим внимание, что при минимальном магнитном поле (10), не дающем сблизиться частицам больше, чем на расстояние (11), реализуется следующая ситуация. После того, как скорости частиц станут параллельны друг другу, магнитная составляющая силы Лоренца, отталкивающая частицы друг от друга, будет точно равна кулоновской силе их притяжения. Действительно, магнитная составляющая силы Лоренца $F_Л = qvB$, которая может быть найдена по формулам (3), (10), (11):

$$F_Л = qvB = q\sqrt{\frac{2xkq^2}{md\left(d-2x\right)}}4\sqrt{\frac{km}{d^3}} = \frac{4kq^2}{d^2},$$

равна кулоновской силе отталкивания частиц на расстоянии $d/2$. Это значит, что при минимальном магнитном поле, не дающим столкнуться частицам, после поворота скоростей они будут лететь параллельно друг другу на расстоянии $d/2$. Если же магнитное поле будет больше минимального, то скорости частиц станут параллельными при меньшей координате x, и магнитная составляющая силы Лоренца будет больше кулоновской силы притяжения частиц. Частицы начнут расходится, и будет реализовываться ситуация, показанная на рисунке (частицы разойдутся снова на расстояние d, потом опять сблизятся и т.д.).

Из формулы (5) следует очевидный предельный случай. Очень большому магнитному полю ($B \to \infty$) отвечает координата $x = 0$. Действительно, в случае очень большого поля частицам достаточно набрать небольшую скорость (т.е. совсем чуть-чуть приблизиться по отношения к первоначальному расстоянию), чтобы поле смогло повернуть их скорости параллельно друг другу.

Еще один комментарий касается уравнения (6) для координаты x положительно заряженной частицы в точке максимального сближения частиц. Как следует из формулы (7), оба корня будут положительными и определяют два положения, в которых скорости частиц будут параллельны друг другу. А поскольку начальная координата этой частицы равна нулю, то скорости станут параллельными, когда ее координата будет равна меньшему из значений (7), т.е. будет реализовываться корень со знаком «минус».

Критерии оценивания решения задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильное условие связи проекции скорости тел на направление перпендикулярное отрезку, соединяющему заряды и смещения в этом направлении – 0,5 балла
2. Правильный закон сохранения энергии для движения зарядов – 0,5 балла
3. Правильное условие минимальности индукции магнитного поля, при котором заряды не столкнуться и расстояние, на котором они в этом случае будут двигаться – 0,5 балла

4. Правильный ответ для индукции минимального магнитного поля, при котором заряды не столкнуться – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

Оценка работы
Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 10 баллов. Допустимыми являются все целые или «полуцелые» оценки от 0 до 10.

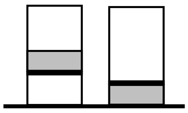
Решения и критерии оценивания решения задач

Заключительного тура олимпиады «Росатом», 2021-2022 учебный год,

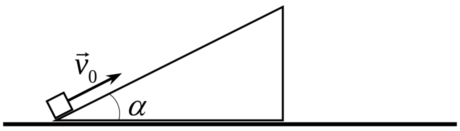
физика, 11 класс

1. Экспериментируя с лунным камнем, Знайка сумел следующим образом изменить ускорение свободного падения в Цветочном городе: до высоты $h=10$ м ускорение свободного падения осталось равным g, выше стало $g/3$. На какую высоту сможет забросить теперь тело Незнайка, если раньше он мог его подбросить на высоту $H=20$ м.

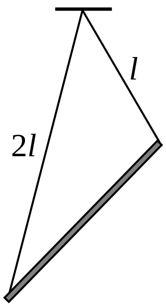
2. В запаянном вертикальном цилиндрическом сосуде находится тонкий невесомый поршень, на который налит слой воды толщиной h (левый рисунок). В равновесии крышка сосуда находится на высоте h_1 от поверхности воды, поршень - на высоте h_2 от дна сосуда, а давление воздуха над слоем воды равно p_1. Из-за неплотных контактов поршня со стенками сосуда вода просачивается вниз, а воздух наверх. Каким будет давление воздуха в сосуде, когда вся вода просочится (правый рисунок). Температура постоянна. Плотность воды - ρ.

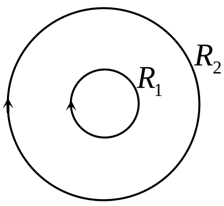


3. На горизонтальной поверхности покоится незакрепленная горка массой m с углом наклона одной грани к горизонту α. У основания горки на ее наклонной грани находится точечное тело массой m. В некоторый момент времени тело толкают вверх вдоль наклонной грани горки. Известно, что тело не «переваливает» через верхушку горки, а после подъема возвращается обратно по наклонной грани. По какой траектории движется тело? Чему равна и как направлена скорость тела (относительно земли), когда оно возвращается на первоначальную высоту? Трение между всеми поверхностями отсутствует. Ответ обосновать.



4. Тонкий однородный массивный стержень массой m и длиной $3l/2$ подвешен на двух невесомых нерастяжимых нитях длиной l и $2l$, которые прикреплены к концам стержня и к одной точке горизонтального потолка (см. рисунок). Найти силы натяжения нитей.





5. Два соленоида с одинаковым числом витков и одинаковой длины изготовлены из одного и того же провода. Радиус одного соленоида $R_1 = R$ втрое меньше радиуса другого R_2: $R_2 = 3R$. В пространстве между соленоидами покоится заряженная частица. Соленоиды соединили параллельно и подключили к источнику электрического напряжения U, которое увеличивается с постоянной скоростью с течением времени $U = \alpha t$, где α - некоторая постоянная. В результате в соленоидах потек электрический ток так, как показано на рисунке (стрелками), а частица стала двигаться по окружности. Найти ее радиус. Силой тяжести и самоиндукцией пренебречь.

Решения

1. Экспериментируя с лунным камнем, Знайка сумел следующим образом изменить ускорение свободного падения в Цветочном городе: до высоты $h = 10$ м ускорение свободного падения осталось равным g, выше стало $g/3$. На какую высоту сможет забросить теперь тело Незнайка, если раньше он мог его подбросить на высоту $H = 20$ м.

1. Поскольку Незнайка сумел подбросить камень до высоты H в однородном поле силы тяжести (при ускорении свободного падения g), он бросает тело с начальной скоростью v_0, которую можно найти из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgH \qquad \Rightarrow \qquad v_0 = \sqrt{2gH} \tag{1}$$

Найдем, как будет двигаться тело в условиях изменяющегося ускорения свободного падания. До высоты h оно движется с ускорением g. Поэтому его скорость на высоте h можно также найти из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} - mgh \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \tag{2}$$

Далее тело движется с ускорением $g/3$. Высоту его подъема h_1 над этим уровнем найдем по закону сохранения энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} = m\frac{g}{3}h_1$$

Используя (1) и (2) получим

$$h_1 = 3H - 3h$$

А, значит, над поверхностью земли тело поднимется на высоту

$$H_1 = h + h_1 = 3H - 2h = 40 \text{ м}$$

Критерии оценивания решения задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная идея решения – использование закона сохранения энергии или законов равноускоренного движения - 0,5 балла
2. Правильная начальная скорость – 0,5 балла
3. Правильные работы силы тяжести на первом и втором участках пути – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

2. Закон Клапейрона-Менделеева для верхнего и нижнего частей сосуда, содержащих воздуха, дает

$$p_1V_1 = \nu_1 RT, \qquad p_2V_2 = \nu_2 RT \tag{1}$$

где p_1, V_1, ν_1 и p_2, V_2, ν_2 - давление, объем и количество вещества воздуха над слоем воды и под поршнем соответственно, T - абсолютная температура воздуха. При просачивании воды и воздуха объем занятой воздухом части сосуда равен $V_1 + V_2$, количество вещества - $\nu_1 + \nu_2$. Поэтому закон Клапейрона-Менделеева для воздуха в сосуде, изображенном на правом рисунке в условии, дает

$$p\left(V_1 + V_2\right) = \left(\nu_1 + \nu_2\right)RT \tag{2}$$

где p давление воздуха в сосуде после просачивания воды и воздуха. Выражая количества вещества ν_1 и ν_2 из (1) и подставляя в (2), найдем

$$p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} = \frac{p_1 h_1 + p_2 h_2}{h_1 + h_2} \qquad (3)$$

Из условия равновесия поршня в первом случае имеем

$$p_1 + \rho g h = p_2$$

где ρ - плотность воды. Подставляя давление p_2 в формулу (3), найдем

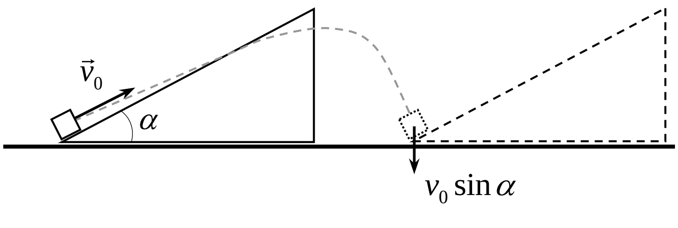
$$p = p_1 + \rho g h \frac{h_2}{h_1 + h_2}$$

Критерии оценивания решения задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильное условие равновесия поршня в начальном состоянии – 0,5 балла
2. Правильный закон Клапейрона-Менделеева для газа в начальном и конечном состояниях – 0,5 балла
3. Правильное давление после просачивания – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

3. Поскольку в процессе движения по горке на тело действуют постоянные силы (сила тяжести и сила реакции горки), его ускорение постоянно. Следовательно, движение тела равноускоренное, а так как векторы его начальной скорости и ускорения не параллельны друг другу, траектория тела – парабола.

Найдем характерные особенности траектории тела и его конечную скорость. На спуск и на подъем тело тратит одинаковое время t. Это время определяется начальной вертикальной составляющей скорости тела и вертикальной составляющей постоянного ускорения $a_{верт}$: $t = v_0 \sin\alpha / a_{верт}$. Вертикальная составляющая скорости тела в момент спуска будет такой же по величине, но противоположно направленной вертикальной составляющей начальной скорости тела $v_{к,верт} = -v_0 \sin\alpha$.

В верхней точке траектории у тела и горки одинаковая скорость. А поскольку у них одинаковая масса, то по закону сохранения горизонтальной составляющей импульса системы «тело+горка» эта скорость равна половине горизонтальной составляющей начальной скорости тела. Поэтому изменение горизонтальной составляющей импульса тела до подъема на максимальную высоту равно половине горизонтальной составляющей начального импульса тела. И, следовательно, в момент возвращения тела на первоначальный горизонтальный уровень горизонтальная составляющая скорости тела будет равна нулю, то есть, в момент падения точечного (по условию) тела на горизонтальную поверхность его скорость вертикальна и равна по величине: $v_0 \sin\alpha$.

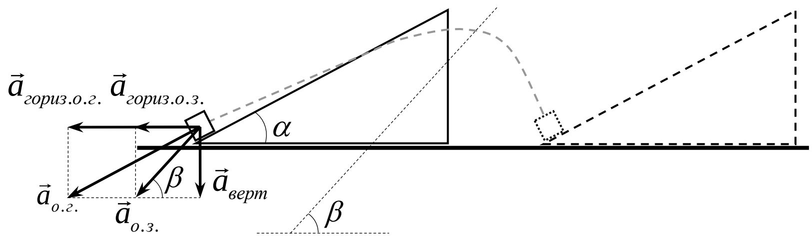


Качественно траектория тела выглядит так, как показано на рисунке (серый пунктир). Здесь сплошными линиями показаны положения тела и горки в начальный момент, черным пунктиром - положение тела и горки в момент «съезжания» тела с горки.

Найдем характерные особенности траектории тела. Очевидно, что ось симметрии параболы, представляющей собой траекторию тела, будет параллельна вектору ускорения тела. Направление этого вектора можно найти из следующих соображений. Поскольку горизонтальная составляющая ускорения тела и ускорение горки создается одной и той же силой реакции между телом и горкой, а массы тела и горки равны, то горизонтальная составляющая ускорения тела $\vec{a}_{гориз.о.з.}$ (относительно земли) и ускорение горки равны по величине (и противоположны по направлению). Поэтому в неинерциальной системе отсчета, связанной с горкой, горизонтальная составляющая ускорения тела $\vec{a}_{гориз.о.г.}$ будет в два раза больше горизонтальной составляющей ускорения тела в системе отсчета, связанной с землей $\vec{a}_{гориз.о.з.}$. А поскольку в системе отсчета, связанной с горкой, вектор ускорения тела $\vec{a}_{о.г.}$ направлен вдоль поверхности горки, то вектор ускорения тела относительно земли $\vec{a}_{о.з.}$ направлен под таким углом β к горизонту, что его тангенс вдвое больше тангенса угла наклона грани клина (см. рисунок):

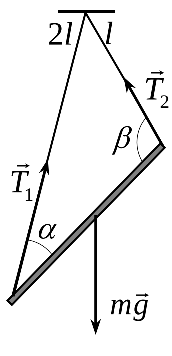
$$\mathrm{tg}\,\beta = 2\mathrm{tg}\,\alpha$$

Именно под таким углом к горизонту направлена и ось симметрии параболы, представляющей собой траекторию тела (см. рисунок, ось симметрии параболы, параллельная вектору ускорения тела относительно земли, показана тонким пунктиром).



Критерии оценивания решения задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная идея решения – использование законов равноускоренного движения – 0,5 балла
2. Правильный вывод о равенстве нулю горизонтальной составляющей скорости тела в момент возврата на первоначальную высоту – 0,5 балла
3. Правильный вывод, что траектория парабола (с обоснованием – ссылка на равноускоренное движение с неодинаково направленными начальной скоростью и ускорением) – 0,5 балла
4. Правильный ответ для конечной скорости – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

4. На стержень действуют силы натяжения нитей $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ и сила тяжести $m\vec{g}$, приложенная к центру стержня, поскольку он однородный. Условие моментов относительно центра стержня дает



$$T_1 \frac{3}{4} l \sin\alpha = T_2 \frac{3}{4} l \sin\beta$$

где α и β - углы треугольника, образованного нитями и стержнем, $3l/4$ - половина длины стержня. Отсюда получаем

$$\frac{T_1}{\sin\beta} = \frac{T_2}{\sin\alpha}$$

С другой стороны, согласно теореме синусов для треугольника, образованного нитями и стержнем, имеем

$$\frac{2l}{\sin\beta} = \frac{l}{\sin\alpha}$$

Деля эти формулы друг на друга, получим

$$\frac{T_1}{2l} = \frac{T_2}{l}$$

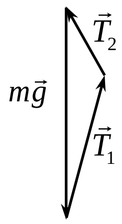
что означает, что сила натяжения нити пропорциональна его длине и может быть представлена как

$$T_1 = k2l, \qquad T_2 = kl$$

где k - некоторый коэффициент, одинаковый для обеих нитей. Используем теперь второе условие равновесия (уравнение сил). Поскольку

$$m\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$$

то векторы сил натяжения и тяжести образуют треугольник (см. рисунок), причем угол между силами $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ в этом треугольнике равен $\alpha+\beta$. Поэтому по теореме косинусов имеем



$$m^2g^2 = T_1^2 + T_2^2 - 2T_1T_2\cos(\alpha+\beta) \qquad (1)$$

Используя пропорциональность сил натяжения длинам нитей, получим

$$m^2g^2 = k^2\left(4l^2 + l^2 - 4l^2\cos(\alpha+\beta)\right)$$

С другой стороны, по теореме косинусов для треугольника, образованного нитями и стержнем, имеем

$$\left(\frac{3}{2}l\right)^2 = 4l^2 + l^2 - 4l^2\cos\left(180^\circ - (\alpha+\beta)\right) = 5l^2 + 4l^2\cos(\alpha+\beta)$$

Выражая отсюда $\cos(\alpha+\beta)$

$$\cos(\alpha+\beta) = -\frac{11}{16}$$

и подставляя его в формулу (1) найдем коэффициент пропорциональности k:

$$k = \frac{2}{\sqrt{31}}\frac{mg}{l}$$

и силы натяжения нитей

$$T_1 = \frac{4}{\sqrt{31}}mg, \qquad T_2 = \frac{2}{\sqrt{31}}mg$$

Критерии оценивания решения задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная идея решения – использование законов равновесия стержня (моментов и сил) – 0,5 балла
2. Правильное соотношение сил натяжения (с обоснованием) – 0,5 балла
3. Правильные тригонометрические функции в треугольнике сил – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

5. При изменении тока в соленоидах по закону электромагнитной индукции внутри соленоидов возникнет вихревое электрическое поле, которое разгоняет частицу, а магнитное поле будет удерживать ее на окружности. Поскольку радиус одного соленоида втрое меньше радиуса другого, то и его сопротивление втрое меньше. А так как они соединены параллельно, то ток во внутреннем соленоиде втрое больше, чем во внешнем. В результате внутри малого соленоида возникнет магнитное поле с индукцией $B_1 = \mu_0 n 4I$, а в пространстве между ними - $B_2 = \mu_0 n I$, где μ_0 - магнитная постоянная, n - число витков на единицу длины соленоида (одинаковое по условию в обоих соленоидах), I - ток в большем соленоиде.

Благодаря осевой симметрии задачи центр окружности, по которой движется частица, лежит на общей оси. Пусть радиус окружности частицы равен r. Тогда поток магнитного поля через эту окружность равен

$$\Phi = \pi r^2 \mu_0 n I + \pi R^2 \mu_0 n 3I$$

Из-за осевой симметрии напряженность вихревого электрического поля на окружности, по которой движется частица, направлена по касательной к этой окружности и одинакова во всех ее точках. А поскольку ЭДС индукции равна работе вихревого электрического поля, то закон электромагнитной индукции дает

$$2\pi r E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \pi \mu_0 n \frac{\alpha}{x}\left(r^2 + 3R^2\right)$$

где x - сопротивление большего соленоида. Отсюда находим проекцию вектора ускорения частицы на касательную к ее траектории

$$a_\tau = \frac{\mu_0 n \alpha q \left(r^2 + 3R^2\right)}{2rxm}$$

где q - заряд частицы, m - ее масса. Поскольку это ускорение постоянно по величине, скорость частицы будет равна

$$v = a_\tau t = \frac{\mu_0 n \alpha t q \left(r^2 + 3R^2\right)}{2rxm} = \frac{\mu_0 n I q \left(r^2 + 3R^2\right)}{2rm} \qquad (1)$$

С другой стороны, по условию частица движется по окружности. Поэтому

$$\frac{mv^2}{r} = qvB \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{mv}{qB}$$

Используя здесь формулу (1) для скорости частицы и значение индукции магнитного поля в пространстве между соленоидами, получим

$$r = \frac{m\mu_0 n I q \left(r^2 + 3R^2\right)}{2rmq\mu_0 n I} = \frac{r^2 + 3R^2}{2r}$$

Отсюда находим

$$r = \sqrt{3}R$$

Критерии оценивания решения задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильная идея решения – вихревое поле разгоняет частицу, магнитное поле обеспечивает центростремительную силу – 0,5 балла
2. Правильное использование закона электромагнитной индукции и – 0,5 балла
3. Правильная скорость частицы как функция времени – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 10 баллов. Допустимыми являются все целые или «полуцелые» оценки от 0 до 10.