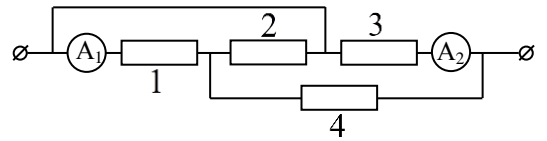


2.9. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 8 класс, комплект 1

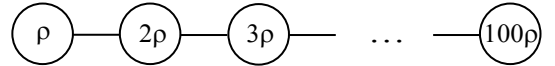
Задания

1. Одну пятую часть пути автомобиль ехал со скоростью $v_1 = 40$ км/ч, а оставшуюся часть - со скоростью $v_2 = 60$ км/ч. Найти среднюю скорость автомобиля на всем пути.

2. Четыре резистора с сопротивлениями $R_1 = 6$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $R_3 = 15$ Ом, $R_4 = 8$ Ом соединены в цепь вместе с двумя идеальными амперметрами (с нулевым сопротивлением) так, как показано на рисунке. Показания амперметра A_1 известны - $I_1 = 0,1$ А. Найти показания амперметра A_2 .



3. Сто тел одинакового объема V имеют плотности ρ , 2ρ , ... 100ρ . Тела связывают веревками так, как показано на рисунке, и бросают в воду. При какой максимальной плотности ρ все тела не утонут в воде? Плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м³.



4. В калориметр, содержащей некоторое количество воды с неизвестной температурой, положили кусок льда с температурой $t_1 = -50^\circ\text{C}$. После установления равновесия весь лед превратился в воду с температурой $t_0 = 0^\circ\text{C}$. После того как в калориметр положили еще восемь таких же куска льда с той же температурой $t_1 = -50^\circ\text{C}$, вся вода превратилась в лед с температурой $t_0 = 0^\circ\text{C}$. Найти начальную температуру воды. Удельная теплоемкость льда $c_l = 2,1 \cdot 10^3$ Дж/(кг·град), удельная теплоемкость воды $c_w = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·град), удельная теплота плавления льда $\lambda = 336 \cdot 10^3$ Дж/кг.

5. Человек движется по эскалатору и считает ступеньки. В первый раз, двигаясь с некоторой постоянной скоростью, он насчитал $n_1 = 65$ ступенек. Во второй раз его скорость относительно эскалатора была вдвое больше его скорости относительно эскалатора в первом случае, и он насчитал $n_2 = 80$ ступенек. Сколько ступенек он насчитает на покоем эскалаторе?

Ответы и решения

1. По определению средней скорости имеем

$$v_{cp} = \frac{S}{t}$$

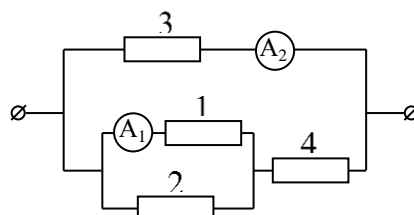
где S расстояние между городами, t - затраченное на весь путь время. Это время найдем через известные скорости автомобиля на первой и второй частях пути, получим

$$t = \frac{S}{5v_1} + \frac{4S}{5v_2} = \frac{S(v_2 + 4v_1)}{5v_1v_2}$$

Отсюда

$$v_{cp} = \frac{5v_1v_2}{v_2 + 4v_1} = 54,5 \text{ км/ч}$$

2. Данная в условии цепь эквивалентна цепи



Сопротивление нижнего участка цепи находим по правилам последовательного и параллельного соединения резисторов

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_4 = 10 \text{ Ом}$$

Поэтому ток через резистор 4 равен

$$I_4 = \frac{U}{10} \text{ (A)}$$

где U - напряжение, приложенное к цепи (в вольтах). На участке параллельного соединения резисторов 1 и 2 ток I_4 делится в отношении R_1 / R_2 . Отсюда находим ток через амперметр A_1

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_4 = \frac{U}{30} \text{ (A)}$$

(где напряжение взято в вольтах). Ток через верхний участок цепи есть

$$I_2 = \frac{U}{R_3} = \frac{U}{15} \text{ (A)}$$

(где напряжение взято в вольтах). Сравнивая две последних формулы, заключаем, что ток через амперметр A_2 вдвое больше тока через амперметр A_1 . Т.е.

$$I_2 = 2I_1 = 0,2 \text{ A}$$

3. Тела не утонут в воде, если средняя плотность ста шаров будет меньше плотности воды. Найдем среднюю плотность шаров. По определению имеем

$$\rho_{cp} = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_{100}}{100V} = \frac{\rho(1 + 2 + \dots + 100)}{100}$$

Сумму всех чисел в скобках можно вычислить, если сложить первое с последним ($1 + 100 = 101$), второе с предпоследним ($2 + 99 = 101$), ... пятидесятое с пятьдесят первым ($50 + 51 = 101$). Поскольку таких пар 50, а сумма чисел каждой пары - 101, то

$$1 + 2 + \dots + 100 = 50 \cdot 101$$

Поэтому $1 + 2 + \dots + 100 = 50 \cdot 101$. Отсюда находим среднюю плотность тела составленного из ста шаров

$$\rho_{cp} = \frac{101\rho}{2}$$

Тела не утонут в воде, если

$$\frac{101\rho}{2} \leq \rho_0 \quad \Rightarrow \quad \rho \leq \frac{2\rho_0}{101} = 19,8 \text{ кг/м}^3.$$

4. Пусть масса льда - m , масса воды - M , искомая температура воды - t_2 . Тогда уравнение теплового баланса для опускания в калориметр одного куска льда дает

$$c_{л} m (t_0 - t_1) + \lambda m = c_{в} M (t_2 - t_0) \quad \Rightarrow \quad t_2 = t_0 + \frac{m}{M} \left(\frac{c_{л} (t_0 - t_1) + \lambda}{c_{в}} \right)$$

Отношение масс куска льда и воды в калориметре найдем, используя второе условие

$$c_{л} 8m (t_0 - t_1) = \lambda (M + m) \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{M} = \frac{\lambda}{8c_{л} (t_0 - t_1) - \lambda}$$

Отсюда

$$t_2 = t_0 + \frac{\lambda (c_{л} (t_0 - t_1) + \lambda)}{c_{в} (8c_{л} (t_0 - t_1) - \lambda)} = 70^\circ \text{C}$$

5. Пусть скорость человека в первом случае v , во втором $2v$, скорость эскалатора - u , длина эскалатора - l , длина одной ступеньки - Δl . Чтобы найти число ступенек, которое насчитает человек, найдем его перемещение относительно эскалатора за то время, которое человек потратит на его прохождение, и разделим на длину одной ступеньки.

В первом случае скорость человека относительно эскалатора равна $v + u$, поэтому человек затратит на его прохождение время $l / (v + u)$, за которое эскалатор пройдет расстояние $lu / (v + u)$.

Поэтому человек переместится относительно эскалатора на расстояние $l(1 - u / (v + u))$, и следовательно насчитает

$$n_1 = \frac{lv}{\Delta l(v+u)} \quad (*)$$

ступенек. Во втором случае он насчитает

$$n_2 = \frac{2lv}{\Delta l(2v+u)}$$

Деля эти равенства друг на друга, получим

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{2v+u}{2(v+u)} = \frac{2+x}{2(1+x)}$$

где $x = u/v$. Из этого уравнения находим отношение скоростей эскалатора и человека

$$x = \frac{2(n_2 - n_1)}{2n_1 - n_2}.$$

Когда человек идет по неподвижному эскалатору он насчитает $l/\Delta l$ ступенек, которое найдем из формулы (*)

$$n = \frac{l}{\Delta l} = \frac{n_1(v+u)}{v} = n_1(1+x)$$

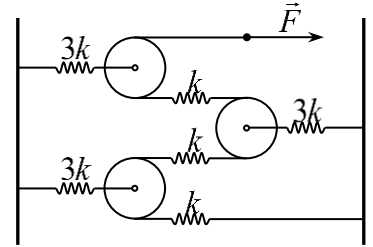
Отсюда

$$n = \frac{n_1 n_2}{2n_1 - n_2} = 104$$

2.10. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 8 класс, комплект 2

Задания

- В 1724 г. Г. Фаренгейт предложил шкалу температур, в которой нулю градусов соответствует температура замерзания смеси льда и соли, взятых в равных количествах. В градусах Цельсия эта температура $-17,8^{\circ}\text{C}$. 100 градусов шкалы Фаренгейта соответствуют температуре $37,8^{\circ}\text{C}$. При какой температуре в шкале Фаренгейта кипит вода при атмосферном давлении (100°C)?
- Феррари, Мерседес и Жигули движутся с постоянными скоростями по прямой дороге. Когда Мерседес и Жигули находились в одной точке, Феррари был на расстоянии S позади. Когда Феррари догнал Жигули, Мерседес был впереди них на расстоянии $5S/6$. На каком расстоянии позади Феррари и Мерседеса окажутся Жигули в тот момент, когда Феррари догонит Мерседес?
- Три одинаковые пружины с коэффициентами жесткости k связаны кусками невесомой нерастяжимой нити. Полученная нить переброшена через три невесомых блока, привязанных к вертикальным стенам с помощью одинаковых пружин с коэффициентами жесткости $3k$ (см. рисунок). На конец нити действуют силой F . Насколько переместится при этом конец нити?
- Имеется три стакана, содержащие массы m , $2m$ и $3m$ воды. В первом стакане вода холодная, во втором – горячая в третьем имеет некоторую промежуточную температуру. Из первого стакана берут ложку воды и переливают во второй, при этом температура воды во втором стакане уменьшается на величину Δt . Затем ложку воды из второго стакана переливают в третий, температура воды в третьем стакане возрастает на $\Delta t/2$. Затем ложку воды из третьего стакана переливают в первый. Насколько изменится при этом температура воды в третьем стакане? Потерями тепла пренебречь.
- Слоненок и Мартышка измеряют длину Удава, который проползал мимо них. В тот момент, когда около них был хвост Удава, Мартышка побежала к его голове и, добежав, положила на землю в ту точку, где находилась голова Удава, банан. Затем она побежала обратно и положила второй банан рядом с кончиком хвоста Удава (который продолжал ползти). Потом пришел Попугай и измерил расстояния от Слоненка (который все время стоял на месте) до бананов в «попугаях». Эти расстояния оказались равны - 48 попугаев и 16 попугаев. Найти отношение скорости Мартышки к скорости Удава и длину Удава в попугаях.



Ответы и решения

- Связь градусов Цельсия и Фаренгейта найдем из очевидного равенства

$$1^{\circ}\text{F} = \frac{37,8 + 17,8}{100} = 0,556^{\circ}\text{C}$$

Интервал температур между нулем шкалы Фаренгейта и температурой кипения воды в градусах Цельсия есть

$$t = 100^{\circ}\text{C} + 17,8^{\circ}\text{C} = 117,8^{\circ}\text{C}$$

Поэтому температуру кипения воды в градусах Фаренгейта можно найти так

$$t = \frac{117,8^{\circ}\text{C}}{0,556^{\circ}\text{C}} \cdot 1^{\circ}\text{F} = 212^{\circ}\text{F}$$

- Пусть скорости машин равны $v_{\text{ф}}$, $v_{\text{м}}$ и $v_{\text{ж}}$. Феррари догонит Жигули через время

$$t = \frac{S}{v_{\text{ф}} - v_{\text{ж}}}$$

Причем Жигули и Мерседес пройдут за это время расстояния

$$l_{\text{ж}} = \frac{v_{\text{ж}} S}{v_{\text{ф}} - v_{\text{ж}}}, \quad l_{\text{м}} = \frac{v_{\text{м}} S}{v_{\text{ф}} - v_{\text{ж}}}$$

Поэтому расстояние от Мерседеса до Феррари и Жигулей в этот момент есть

$$\frac{5S}{6} = l_{\text{м}} - l_{\text{ж}} = \frac{(v_{\text{м}} - v_{\text{ж}}) S}{v_{\text{ф}} - v_{\text{ж}}}$$

Отсюда

$$\frac{v_m - v_{жс}}{v_\phi - v_{жс}} = \frac{5}{6} \quad (*)$$

Теперь рассмотрим второй этап движения. Феррари догонит Мерседес через время

$$t_1 = \frac{5S/6}{v_\phi - v_m}$$

за которое Феррари и Жигули пройдут расстояния

$$l_{жс} = \frac{v_{жс} 5S/6}{v_\phi - v_m}, \quad l_\phi = \frac{v_\phi 5S/6}{v_\phi - v_m}$$

И потому расстояние от Феррари и Мерседеса до Жигулей в этот момент будет равно

$$S_1 = l_\phi - l_{жс} = \frac{(v_\phi - v_{жс}) 5S/6}{v_\phi - v_m}$$

Добавляя и вычитая в знаменателе скорость $v_{жс}$, деля на разность скоростей $v_\phi - v_{жс}$ и пользуясь формулой (*), получим

$$S_1 = \frac{(v_\phi - v_{жс}) 5S/6}{(v_\phi - v_{жс}) - (v_m - v_{жс})} = \frac{5S/6}{1 - \frac{v_m - v_{жс}}{v_\phi - v_{жс}}} = \frac{5S/6}{1 - \frac{5}{6}} = 5S$$

3. Сила натяжения нити, охватывающей блоки, одинакова во всех точках. Поэтому пружины с коэффициентами жесткости k будут растянуты на величину

$$\Delta x = \frac{F}{k}$$

На блоки со стороны этой нити действует сила $2F$. Поэтому пружины с жесткостью $3k$ будут растянуты на величину

$$\Delta x_1 = \frac{2F}{3k},$$

и за счет перемещения каждого из них освободится кусок нити, переброшенной через блоки, длиной $2\Delta x_1$ (с одной и другой стороны от каждого блока). Поэтому перемещение конца нити будет равно

$$\Delta l = 3\Delta x + 6\Delta x_1 = \frac{3F}{k} + 6 \frac{2F}{3k} = \frac{7F}{k}$$

4. После всех переливаний в каждом стакане будет такое же количество воды, как и до переливаний, но другие температуры. Поэтому легко посчитать, сколько тепла получил и приобрел второй и третий стакан. Учитывая, что тепло не терялось, отсюда можно найти сколько получил или отдал тепла первый стакан, а затем и изменение его температуры.

Второй стакан потерял количество теплоты $Q_2 = c2m\Delta t$ (c - удельная теплоемкость воды). Третий стакан получил $Q_3 = c3m\Delta t/2$. Поэтому первый стакан получил $Q_1 = Q_2 - Q_3 = cm\Delta t/2$. Отсюда заключаем, что температура воды в первом стакане увеличилась на следующую величину Δt_1

$$cm\Delta t_1 = Q_1 = cm\Delta t/2 \quad \Rightarrow \quad \Delta t_1 = \Delta t/2$$

5. Очевидно, мартышка пробежала до головы удава расстояние $lv_m/(v_m - v_y)$, которое по условию равно 48 попугаям (здесь l - длина Удава, v_m - скорость Мартышки, v_y - скорость Удава). Поэтому

$$\frac{lv_m}{v_m - v_y} = 48 \Pi \quad (*)$$

Когда Мартышка побежала обратно, она пробежала расстояние (от точки разворота) $lv_m/(v_m + v_y)$, которое по условию равно 32 Π (48 Π - 16 Π). Поэтому

$$\frac{lv_m}{v_m + v_y} = 32 \text{ П} \quad (**)$$

Решая систему уравнений (*)-(**), найдем

$$\frac{v_m}{v_y} = 5, \quad l = 38,4 \text{ П}$$