

2.21. Олимпиада имени И.В.Савельева (отборочный тур олимпиады «Росатом»), 8 класс

Задания

1. Из города А в город В с одинаковыми скоростями $v = 60$ км/час выехали два поезда, причем один отправился через $\Delta t_1 = 10$ мин после другого. Поезд, идущий из города В в город А, повстречал эти поезда через $\Delta t_2 = 4$ мин один после другого. Найти скорость поезда, идущего в город А.
2. Чебурашка и крокодил Гена бегут в одну сторону по параллельным дорожкам, расстояние между которыми l . В некоторый момент времени они оказались на минимально возможном расстоянии друг от друга (l), а через минуту расстояние между ними стало равно $l_1 = 2l$. Какое расстояние будет между ними еще через минуту?
3. До какой минимальной температуры нужно нагреть стальной кубик, чтобы при постановке его на лед с температурой $t_0 = 0^\circ \text{C}$ он смог полностью погрузиться в лед. Плотность льда $\rho_0 = 900$ кг/м³, плотность стали $\rho = 7800$ кг/м³, удельная теплоемкость стали $c = 4,6 \cdot 10^2$ Дж/(кг·град), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,4 \cdot 10^5$ Дж/кг.
4. В планетной системе вокруг звезды в одну сторону и в одной плоскости вращаются две планеты – Ио и Ои. Противостоянием планет называется ситуация, когда планеты и звезда находятся на одной прямой, причем звезда находится между планетами. Известно, что интервал времени между двумя ближайшими противостояниями планет равен 5,6 лет планеты Ио. Сколько лет планеты Ои проходит между двумя ближайшими противостояниями?
5. В метро есть два эскалатора. Один из них работает на подъем, второй не работает. Чебурашка спустился по работающему эскалатору, а затем поднялся по неработающему, затратив на это движение время t . Затем он спустился по неработающему эскалатору, а поднялся по работающему, затратив на это движение время $2t/3$. Найти скорость движущегося эскалатора, если скорость Чебурашки относительно эскалатора при движении вниз равна v и вдвое больше скорости его скорости при движении вверх.

Ответы и решения

1. Расстояние между поездами, идущими в город В, равно $v\Delta t_1$. Поэтому встреча со вторым поездом произойдет через время

$$\Delta t_2 = \frac{v\Delta t_1}{v + v_1}$$

После встречи с первым (v_1 - скорость поезда, идущего из города В в город А). Отсюда

$$v_1 = v \left(\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} - 1 \right) = 90 \text{ км/час}$$

2. Пусть скорость крокодила Гены - v_G , Чебурашки - v_C . Тогда из условия задачи и теоремы Пифагора имеем

$$2l = \sqrt{l^2 + (v_G - v_C)^2 \Delta t^2}$$

где $\Delta t = 1$ мин. Из этого равенства находим

$$(v_G - v_C)^2 \Delta t^2 = 3l^2$$

Тогда расстояние между Чебурашкой и крокодилом Геной еще через минуту найдем из следующего очевидного равенства

$$\Delta x = \sqrt{l^2 + 4(v_G - v_C)^2 \Delta t^2} = \sqrt{13}l$$

Отметим, что это решение не зависит от того, чья скорость – Чебурашки или крокодила Гены – больше.

3. Чтобы куб мог полностью погрузиться в лед, нужно чтобы количество теплоты, выделившееся при его остывании от начальной температуры до температуры льда ($t_0 = 0^\circ \text{C}$) было достаточно, чтобы растопить лед, объем которого больше или равен объему куба. Минимальной начальной температуре льда t_x , достаточной для этого, отвечает ситуация, когда объем растаявшего льда равен объему куба. Поэтому для минимальной температуры куба получим

$$\lambda \rho_0 V = c \rho V (t_x - t_0)$$

где V - объем куба. Отсюда получаем

$$t_x = t_0 + \frac{\lambda \rho_0}{c \rho} = 105^\circ \text{C}$$

4. Если планета Ои вращается быстрее планеты Ио, то между двумя противостояниями с планетой Ио она сделает ровно на 1 полный оборот больше. Если Ои вращается медленнее, она сделает на 1 полный оборот меньше. А поскольку полному обороту планеты вокруг звезды отвечает 1 год этой планеты, то по часам планеты Ои пройдет 6,6 лет (если Ои вращается быстрее) и 4,6 лет (если Ои вращается медленнее).

5. Соотношения «расстояние-время-скорость» для спуска-подъема по работающему-неработающему эскалатору и наоборот дают

$$\frac{l}{v-u} + \frac{l}{v/2} = t$$

$$\frac{l}{v/2+u} + \frac{l}{v} = \frac{2t}{3}$$

где l - длина эскалатора, u - его скорость. Из этой системы уравнений получаем квадратное уравнение для u :

$$2u^2 - 11uv + 3v^2 = 0$$

Отсюда

$$u = \frac{(11 - \sqrt{97})}{4}v$$

(второй корень не удовлетворяет условию, т.к. $u > v$).