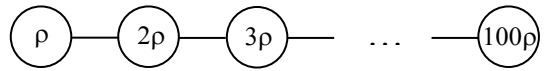


## 2.11. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 7 класс

### Задания

- Одну пятую часть пути автомобиль ехал со скоростью  $v_1 = 40$  км/ч, а оставшуюся часть - со скоростью  $v_2 = 60$  км/ч. Найти среднюю скорость автомобиля на всем пути.
- На столе лежит сделанное из пластилина тело в форме куба. Давление тела на стол -  $p = 100$  Па. Когда сверху на это тело положили стальной куб, ребро которого в  $n = 2$  раза больше ребра пластилинового куба. Пластилин расплющился, и площадь его контакта со столом увеличилась вдвое. Чему стало равно давление на стол? Плотность пластилина -  $\rho_0 = 1400$  кг/м<sup>3</sup>, плотность стали -  $\rho_1 = 7800$  кг/м<sup>3</sup>.
- Перловую крупу массой  $m = 1$  кг залили водой массой  $M = 3$  кг и сварили. Известно, что плотность сухой перловки  $\rho = 1400$  кг/м<sup>3</sup>, вареной -  $\rho_1 = 1200$  кг/м<sup>3</sup>, воды  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Считая, что объем вареного зерна равен сумме объемов сухого зерна и впитавшейся в него воды, найти массу испарившейся при варке воды.
- Сто тел одинакового объема  $V$  имеют плотности  $\rho, 2\rho, \dots, 100\rho$ . Тела связывают веревками так, как показано на рисунке, и бросают в воду. При какой максимальной плотности  $\rho$  все тела не утонут в воде? Плотность воды  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>.



### Ответы и решения

- По определению средней скорости имеем

$$v_{cp} = \frac{S}{t}$$

где  $S$  расстояние между городами,  $t$  - затраченное на весь путь время. Это время найдем через известные скорости автомобиля на первой и второй частях пути, получим

$$t = \frac{S}{5v_1} + \frac{4S}{5v_2} = \frac{S(v_2 + 4v_1)}{5v_1v_2}$$

Отсюда

$$v_{cp} = \frac{5v_1v_2}{v_2 + 4v_1} = 54,5 \text{ км/ч}$$

- Давление куба на стол в первом случае определяется соотношением

$$p = \frac{m}{S}$$

где  $m$  - масса куба,  $S$  - площадь его грани. Давление во втором случае находится аналогично

$$p' = \frac{m + M}{2S} = \frac{m}{2S} \left( 1 + \frac{M}{m} \right) = \frac{p}{2} \left( 1 + \frac{M}{m} \right)$$

где  $M$  - масса стального куба. Отношение масс куба из стали и куба из пластилина найдем, через их плотности и размеры

$$\frac{M}{m} = \frac{\rho_1 (2a)^3}{\rho_0 a^3} = \frac{8\rho_1}{\rho_0}$$

где  $a$  - ребро пластилинового куба,  $2a$  - стального. В результате находим давление во втором случае

$$p' = \frac{p}{2} \left( 1 + \frac{8\rho_1}{\rho_0} \right) = 2280 \text{ Па}$$

3. Масса и объем вареной крупы отличается от массы и объема сухой за счет добавления воды. Считая (как это сказано в условии), что объем вареной крупы равен сумме объемов сухой крупы и впитавшейся в него воды (для масс это очевидно), получим

$$\rho_1 = \frac{m + \rho_0 V}{\frac{m}{\rho} + V}$$

(где  $V$  - объем воды, впитавшейся в перловку). Или

$$\frac{m}{\rho} + V = \frac{m}{\rho_1} + \frac{\rho_0 V}{\rho_1}$$

Отсюда находим объем, а затем и массу воды, впитавшейся в крупу

$$V = \frac{m(\rho - \rho_1)}{\rho(\rho_1 - \rho_0)} \quad m_1 = \frac{m\rho_0(\rho - \rho_1)}{\rho(\rho_1 - \rho_0)} = 1,43 \text{ кг}$$

Поэтому выкипело

$$\Delta M = M - \frac{m\rho_0(\rho - \rho_1)}{\rho(\rho_1 - \rho_0)} = 3 - 1,43 = 1,57 \text{ кг}$$

4. Тела не утонут в воде, если средняя плотность ста шаров будет меньше плотности воды. Найдем среднюю плотность шаров. По определению имеем

$$\rho_{cp} = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_{100}}{100V} = \frac{\rho(1 + 2 + \dots + 100)}{100}$$

Сумму всех чисел в скобках можно вычислить, если сложить первое с последним ( $1 + 100 = 101$ ), второе с предпоследним ( $2 + 99 = 101$ ), ... пятидесятое с пятьдесят первым ( $50 + 51 = 101$ ). Поскольку таких пар 50, а сумма чисел каждой пары – 101, то

$$1 + 2 + \dots + 100 = 50 \cdot 101$$

Поэтому  $1 + 2 + \dots + 100 = 50 \cdot 101$ . Отсюда находим среднюю плотность тела составленного из ста шаров

$$\rho_{cp} = \frac{101\rho}{2}$$

Тела не утонут в воде, если

$$\frac{101\rho}{2} \leq \rho_0 \quad \Rightarrow \quad \rho \leq \frac{2\rho_0}{101} = 19,8 \text{ кг/м}^3.$$

5. Пусть расстояние между машинами в пробках, движущихся и в одном, и в противоположном направлении, равно  $l$ , скорость пробки в одном направлении -  $2u$ , в другом -  $u$ . Используя известные формулы встречи двух тел, движущихся навстречу друг другу и друг за другом, найдем интервалы времени между встречами автомобиля скорой помощи со встречными машинами, и машинами, движущимися в том же направлении

$$\text{в том же направлении } \Delta t_1 = \frac{l}{v - 2u}$$

$$\text{в противоположном направлении } \Delta t_2 = \frac{l}{v + u}$$

И далее из условия находим

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{v + u}{v - 2u} = n$$

Отсюда находим скорость машин в пробке

$$u = \frac{(n-1)v}{2n-1} = \frac{5v}{13} \quad \text{и} \quad 2u = \frac{2(n-1)v}{2n-1} = \frac{10v}{13}$$