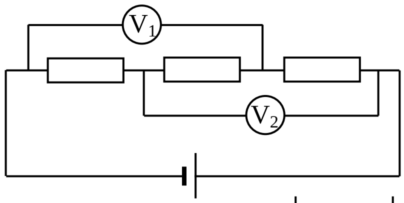
# 2. Материалы заданий 2016/2017 учебного года

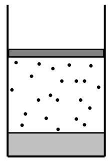
## 2.1. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 1

### Задание

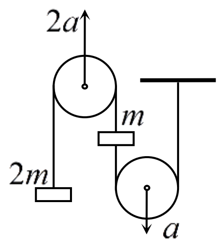
**1.** В электрической цепи, схема которой представлена на рисунке, три одинаковых резистора соединены последовательно и подключены к батарейке с ЭДС $\varepsilon = 6$ В. Два одинаковых вольтметра, подключенных так, как показано на рисунке, показывают напряжение $U = 3$ В. Что будет показывать один из них, если второй вообще отключить от цепи? Внутреннее сопротивление источника равно нулю.



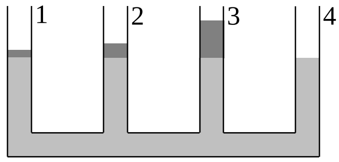

**2.** В вертикальный цилиндрический сосуд с водой налили воду и закрыли сосуд очень легким подвижным поршнем. Первоначально воздух в сосуде сухой (не содержит паров воды) и имеет плотность $\rho_0 = 1$ кг/м$^3$. Увеличится или уменьшится плотность влажного воздуха в сосуде, когда часть воды испарится? На сколько увеличится или уменьшится плотность влажного воздуха в сосуде по сравнению с плотностью сухого воздуха через достаточно продолжительное время, когда вода перестанет испаряться? Температура воздуха постоянна в течение всего процесса. Давление насыщенных паров при рассматриваемой температуре составляет одну седьмую часть от атмосферного. Средняя молярная масса воздуха $\mu_0 = 29$ г/моль, молярная масса воды $\mu_1 = 18$ г/моль. Воздух считать идеальным газом.



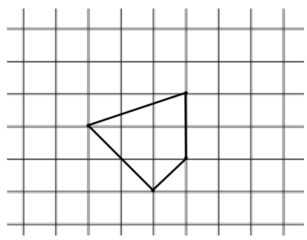
**3.** В системе двух тел с массами $m$ и $2m$, связанных нерастяжимой и невесомой нитью, второй конец которой прикреплен к потолку, и двух невесомых блоков (см. рисунок), ускорения блоков известны и равны $a$ и $2a$ (см. рисунок). Какими силами нужно действовать на блоки?



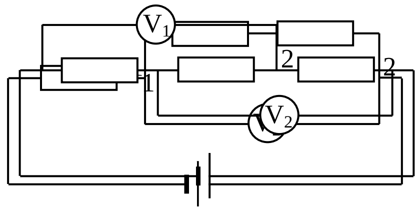

**4.** Имеются четыре одинаковых цилиндрических сосуда, в которое налито некоторое количество воды. Поверх воды в первый, второй и третий сосуды (сосуды перенумерованы на рисунке) аккуратно наливают слой масла толщиной соответственно $h$, $2h$ и $3h$. Насколько изменится уровень жидкости в каждом сосуде по сравнению с первоначальным положением после установления равновесия? Известно, что при наливании масла вода ни из одного сосуда полностью маслом не вытесняется. Плотность масла $\rho_0$, воды $\rho_1$ ($\rho_1 > \rho_0$).




**5.** На рисунке изображен выпуклый четырехугольник. Где нужно расположить тонкую собирающую линзу, и каким должно быть ее фокусное расстояние, чтобы изображение четырехугольника имело форму квадрата? Решить задачу графически и обосновать все сделанные построения на основе законов геометрической оптики (правильное построение без обоснования и комментариев не будет считаться правильным ответом). Оценить по рисунку фокусное расстояние этой линзы, считая, что одна клеточка на рисунке равна 1 см.



### Ответы и решения




**1.** Очевидно, вольтметры неидеальные, поскольку в случае идеальности они должны были бы показывать 2/3 от напряжения источника, а они показывают половину. Кроме того, из данных условия очевидно, что ток через центральное сопротивление не течет. Действительно, поскольку вольтметры $V_1$ и $V_2$ показывают половину напряжения источника, то потенциалы точек 1 и 2 одинаковы. Поэтому ток через центральное сопротивление не течет, его можно выбросить, а падения напряжения на резисторах и вольтметрах одинаковы. Поэтому сопротивление вольтметра равно сопротивлению резисторов.

При выбрасывании одного вольтметра цепь принимает следующий вид (см. рисунок), причем сопротивление участка 1-2 равно $\dfrac{2R}{3}$, поскольку сопротивление вольтметра равно сопротивлению резисторов.

Поэтому напряжение на участке 1-2 составляет 2/5 от напряжения источника и, следовательно,

$$V_2 = \frac{2}{5}\varepsilon = 2,4 \text{ В}$$

**2.** Поскольку поршень легкий и не закреплен, давление воздуха в сосуде равно атмосферному в течение всего процесса. А поскольку по условию воздух можно считать идеальным газом, то концентрация молекул воздуха не меняется. Это значит, что при испарении воды будет увеличиваться объем воздуха (поршень будет подниматься), и в единице объема воздуха останется то же самое число молекул. А поскольку каждая молекула воды (16 а.е.м.) легче усредненной молекулы воздуха (29 а.е.м.), то масса единицы объема влажного воздуха (т.е. плотность) будет меньше, чем масса единицы объема сухого.

Найдем теперь плотность влажного воздуха. Пусть концентрация молекул воздуха равна $n$. Пока он был сухим, это были молекулы собственно воздуха (усредненные), и потому его плотность равна

$$\rho_0 = nm_0 = \frac{n\mu_0}{N_A} \qquad (*)$$

где $m_0$ - масса молекулы воды, $\mu_0$ - молярная масса воды, $N_A$ - число Авогадро.

Из условия можно заключить, что нам нужно найти плотность насыщенного пара (поскольку вода перестала испаряться). Это значит, что парциальное давление водяного пара равно давлению насыщенного пара при данной температуре $p_н$, а парциальное давление собственно воздуха равно $p_0 - p_н$. Поэтому в единице объема воздуха под поршнем находится

$$n_0 = \frac{p_0 - p_н}{p_0} n$$

молекул собственно воздуха (усредненных) и

$$n_1 = \frac{p_н}{p_0} n$$

молекул воды. Отсюда по формулам, аналогичным формуле (*), можно найти плотность влажного воздуха

$$\rho_1 = n_0 m_0 + n_1 m_1 = \frac{p_0 - p_н}{p_0}\frac{n\mu_0}{N_A} + \frac{p_н}{p_0}\frac{n\mu_1}{N_A} = \frac{n\mu_0}{N_A} - \frac{p_н}{p_0}\frac{n(\mu_0 - \mu_1)}{N_A} = \rho_0\left(1 - \frac{p_н}{p_0}\left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_0}\right)\right)$$

Учитывая, что по условию давление насыщенного пара составляет одну седьмую часть от атмосферного давления, получим далее

$$\rho_1 = \rho_0\left(1 - \frac{p_н}{p_0}\left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_0}\right)\right) = \frac{\rho_0}{7}\left(6 + \frac{\mu_1}{\mu_0}\right) = 0,95 \text{ кг/м}^3$$

**3.** Пусть сила натяжения верхней нити (охватывающей блок, движкщийся с ускорение м $2a$, равна $T_1$, второй нити - $T_2$. Тогда второй закон Ньютона для грузов дает

$$2ma_1 = T_1 - 2mg$$

$$ma_2 = T_1 - T_2 - mg$$

Найдем связь ускорений грузов с ускорением блоков. Пусть нижний блок опустился на $\Delta l$. Тогда верхний блок поднимется на $2\Delta l$ (его ускорение в два раза больше). Очевидно, что тело массой $m$ переместится на $2\Delta l$, тело массой $2m$ поднимется на $6\Delta l$. Поэтому ускорение тела $m$ равно $2a$ и направлено вниз, тела $2m$ - $6a$ и направлено вверх. Поэтому система уравнений (*) принимает вид

$$12ma = T_1 - 2mg$$

$$2ma = T_2 + mg - T_1$$

Отсюда

$$T_1 = 12ma + 2mg$$

$$T_2 = 14ma + mg$$

Ну а поскольку блоки невесомы, то силы, которым нужно действовать на блоки, равны удвоенным силам натяжения нитей:

$$F_1 = 2T_1 = 24ma + 4mg, \qquad F_2 = 2T_2 = 28ma + 2mg$$

**4.** С точки зрения давления в жидкости наливание в сосуд слоя масла толщиной $h$ эквивалентно наливанию слоя воды толщиной

$$\frac{\rho_0 h}{\rho_1}.$$

Поэтому наливание в систему сосудов слоя масла толщиной $6h$ (в первый, второй и третий сосуды) эквивалентно тому, что мы нальем слой воды толщиной

$$h_1 = \frac{6\rho_0 h}{\rho_1}$$

Но если бы мы налили такое количество воды, она распределилась бы равномерно по четырем сосудам. Учитывая, что в четвертом сосуде будет только вода (по условию масло полностью воду ни из одного сосуда не вытесняет и, следовательно, не может попасть в четвертый сосуд), то уровень воды в нем поднимется на величину

$$\Delta h_4 = \frac{6\rho_0 h}{4\rho_1} = \frac{3\rho_0 h}{2\rho_1}.$$

При этом давление в жидкости (около дна сосуда) возрастет на величину

$$\Delta p = \rho_1 g h_4 = \frac{3}{2}\rho_0 g h \qquad (*)$$

Изменение уровня жидкости в первом, втором и правом сосудах найдем из условия увеличения давления в этих сосудах на эту величину.

В первом сосуде находится слой масла толщиной $h$, который обеспечивает дополнительное давление $\rho_0 g h$. Поэтому для увеличения давления на $(3/2)\rho_0 g h$ в левый сосуд должна войти дополнительная вода, дающая давление около дна сосуда $(1/2)\rho_0 g h$, т.е. слой воды толщиной $(1/2)(\rho_0/\rho_1)h$. Это значит, что уровень жидкости в перовом сосуде увеличится на величину

$$\Delta h_1 = h + \frac{\rho_0}{2\rho_1}h = h\left(1 + \frac{\rho_0}{2\rho_1}\right)$$

Во втором сосуде появится дополнительный слой масла толщиной $2h$, который обеспечивает дополнительное давление

$$2\rho_0 g h$$

Поэтому чтобы давление около дна второго сосуда возросло на величину $\Delta p$ (*) из второго сосуда должна уйти вода толщиной $(1/2)(\rho_0/\rho_1)h$. Поэтому уровень воды во втором сосуде поднимется на величину

$$\Delta h_2 = 2h - \frac{\rho_0}{2\rho_1}h = 2h\left(1 - \frac{\rho_0}{4\rho_1}\right)$$

В третьем сосуде появится дополнительный слой масла толщиной $3h$, который обеспечивает дополнительное давление

$$3\rho_0 gh$$

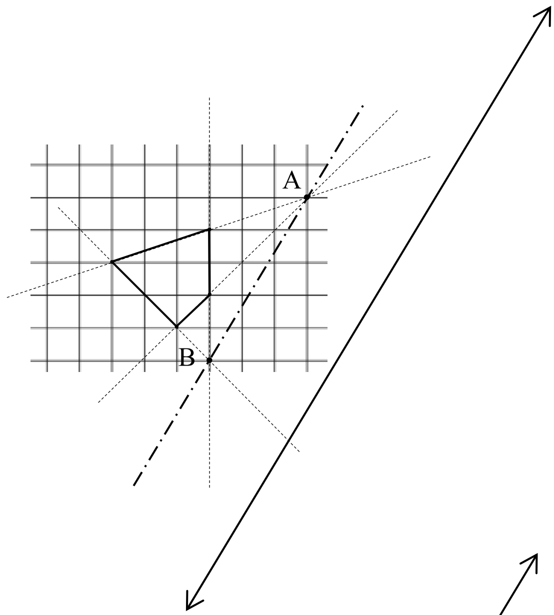
Поэтому чтобы давление около дна третьего сосуда возросло на величину $\Delta p$ (*) из третьего сосуда должна уйти вода толщиной $(3/2)(\rho_0/\rho_1)h$. Поэтому уровень воды в третьем сосуде поднимется на величину

$$\Delta h_3 = 3h - \frac{3\rho_0}{2\rho_1}h = 3h\left(1 - \frac{\rho_0}{2\rho_1}\right)$$

(проверка: сумма подъемов уровней жидкости во всех сосудах должна дать то, что налили, т.е. $4h$.

$$\Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3 + \Delta h_4 = h + \frac{\rho_0}{2\rho_1}h + 2h - \frac{\rho_0}{2\rho_1}h + 3h - \frac{3\rho_0}{2\rho_1}h + \frac{3\rho_0}{2\rho_1}h = 6h$$

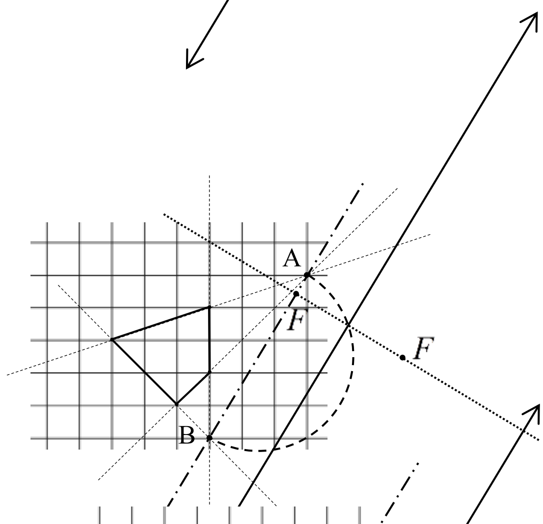
как и должно быть)



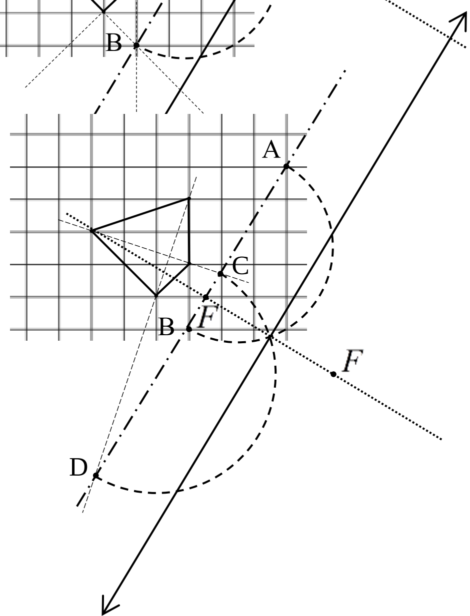

**5.** Очевидно, изображение четырехугольника будет квадратом, если: (1) изображения противоположных сторон будут параллельны, (2) угол между изображениями пар противоположных сторон будет равен $90°$, (3) угол между изображениями диагоналей четырехугольника также будет равен $90°$. Установим, в каких случаях условия (1), (2) и (3) выполняются.

(1) Пусть есть тонкая собирающая линза и два непараллельных отрезка. Построим их изображения и поймем, когда их изображения будут параллельными.

Для построения изображений отрезков возьмем лучи, идущие вдоль самих отрезков. Тогда каждый из таких лучей проходит и через один конец отрезка, и через другой, и, следовательно, изображение отрезков будет лежать на этих лучах после их прохождения линзы (такие лучи показаны на рисунке пунктиром). Но чтобы два луча после прохождения собирающей линзы были параллельны, до линзы они должны пересекаться в ее фокальной плоскости. Это значит, что точки х пересечения (A и B на рисунке) принадлежат фокальной плоскости линзы (показана штрихпунктирной линией), а сама линза лежит справа от прямой AB (в качестве примера показано одно из возможных расположений линзы, причем ее фокусное расстояние должно равняться расстоянию от линзы до прямой AB).




Итак, после прохождения линзы, показанной на рисунке, изображение четырехугольника будет параллелограммом. Установим теперь, когда это изображение будет прямоугольником. Очевидно, оно будет прямоугольником тогда, когда лучи, вышедшие из точек A и B, и проходящие через центр линзы, будут перпендикулярны друг другу. Действительно, эти лучи не преломляются, все остальные лучи, проходящие через точки A и B, после прохождения линзы будут им параллельны. Поэтому центр линзы может лежать в любой точке, принадлежащей полуокружности, проходящей через точки A и B (см. рисунок; полуокружность показана пунктиром, а главная оптиче-



ская ось линзы – точечной линией; отмечены также ее фокусы).

Итак, изображение четырехугольника в линзе, приведенной на последнем рисунке будет прямоугольником, причем таких положений линз еще будет очень много (ее центр может располагаться в любой точке пунктирной окружности на последнем рисунке). Можно ли подобрать ее такое расположение, чтобы изображение четырехугольника было бы квадратом? Для этого надо, чтобы изображение диагоналей четырехугольника были перпендикулярны друг другу. А для этого надо, чтобы угол между вышедшими из точек C и D и проходящими через центр линзы был прямым. Для этого центр линзы должен лежать на полуокружности, проходящей через точки C и D.

Поскольку все построения проводились в правильном масштабе, рисунок можно использовать для оценки фокусного расстояния линзы. Из рисунка находим, что расстояние от линзы до ее фокальной плоскости составляет около двух диагоналей одной клетки, т.е. равно

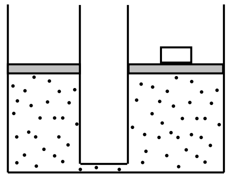
$$F \approx 3 \text{ см}$$

## 2.2. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 2

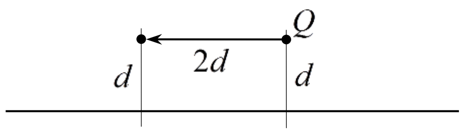
### Задания

**1.** Тело движется с постоянным ускорением $a$ из некоторой точки. Известно, что начальная скорость тела не равна нулю, и когда тело прошло путь $S$ после начала движения, его скорость увеличилась в 2 раза по величине по сравнению с начальной скоростью, но стала ей противоположной. Через какое время после этого скорость тела возрастет еще в 2 раза?

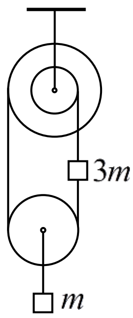
**2.** Имеется два вертикальных цилиндрических сосуда с разной площадью сечения, которые в своих нижних частях соединены тонкой трубкой. Сосуды закрыты подвижными поршнями одинаковой массы $m$. Поршни находятся в равновесии на одинаковой высоте $h$ от дна сосуда, но большем поршне лежит дополнительный груз массой $m/2$ (см. рисунок). В некоторый момент времени груз снимают с поршня. На какой высоте от дна сосуда окажется этот поршень после установления равновесия? Атмосферным давлением пренебречь, температура газа не меняется.



**3.** Точечный заряд $Q$ находится на расстоянии $d$ от очень большой проводящей плоскости. В некоторый момент времени заряд перемещают на расстояние $2d$ вдоль плоскости (см. рисунок), причем так быстро, что за время перемещения заряда $Q$ заряды на плоскости не успели сместиться от своих первоначальных положений. Какое количество теплоты выделится в веществе плоскости в процессе установления равновесия?




**4.** Блок склеен из двух дисков с радиусами $R$ и $2R$, насаженных на одну и ту же горизонтальную ось, и подвешен к горизонтальному потолку. На блоки намотана невесомая нерастяжимая нить, к которой прикреплен груз массой $m$, как это показано на рисунке. Нить охватывает также нижний блок, размеры которого подобраны так, что все отрезки нити вертикальны. Второй груз массой $3m$ прикреплен к оси нижнего блока. Найти ускорение тел. Блоки невесомы.




**5.** Тело движется в некоторой среде. Известно, что сила сопротивления среды пропорциональна квадрату скорости тела. Известно, что скорость тела уменьшилась в 2 раза, через время $T$ после начала движения. Через какое время после этого скорость тела уменьшится еще втрое? Всеми другими силами, кроме силы сопротивления среды, пренебречь.

### Ответы и решения

**1.** Из законов равноускоренного движения имеем

$$4v_0^2 + v_0^2 = 2aS$$

где $v_0$ - начальная скорость тела. Отсюда

$$v_0 = \sqrt{\frac{2aS}{5}}$$

Применяя теперь к движению от этой точки до точки, в которой его скорость стала равна $4v_0$, получим

$$4v_0 = 2v_0 + a\Delta t$$

где $\Delta t$ - искомое время.
Отсюда

$$\Delta t = \sqrt{\frac{8S}{5a}}$$

**2.** Пусть давление газа в сосуде равно $p$. Тогда условия равновесия поршней дают

$$pS_1 = mg, \qquad pS_2 = \frac{3}{2}mg$$

где $S_1$ и $S_2$ - площади сечения более узкого и более широкого сосуда соответственно. Деля эти уравнения друг на друга, найдем отношения площадей сечения сосудов $S_1/S_2 = 2/3$. Когда с большого поршня мы снимаем груз, условия равновесия обоих поршней одновременно не могут удовлетворится при любом их положении. Это значит, что малый поршень должен опуститься на дно сосуда, а весь газ перейти в большой сосуд, причем из условия равновесия большого поршня имеем для давления газа в большом сосуде

$$p_1 = \frac{mg}{S_2}$$

Применяя теперь к газу в широком сосуде закон Клапейрона-Менделеева, получим

$$mgh_1 = \nu RT \qquad (*)$$

где $h_1$ - высота поршня над дном широкого сосуда после снятия груза и установления равновесия, $\nu$ - количество вещества газа во всем сосуде, $T$ - температура газа. С дрогой стороны, закон Клапейрона-Менделеева для газа во всем сосуде до снятия груза дает

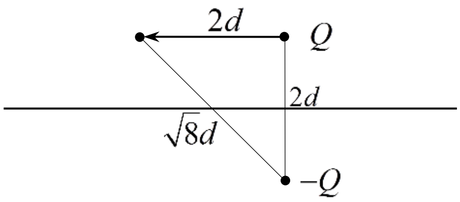
$$\frac{mg}{S_1}\left(S_1 h + S_2 h\right) = \nu RT \qquad (**)$$

Деля уравнения (*) и (**) друг на друга и учитывая соотношение площадей сечения сосудов, получим

$$h_1 = \frac{5}{2}h$$

**3.** Как известно, со стороны проводящей плоскости на точечный заряд $Q$ действует такая же сила, как со стороны точечного заряда $-Q$, расположенного за плоскостью на таком же расстоянии, как и точечный заряд. Или (другими словами), на плоскости индуцируются такие заряды, поле которых совпадает с полем точечного заряда, расположенного за плоскостью на таком же расстоянии от него. А поскольку по условию в процессе перемещения точечного заряда $Q$ заряды на плоскости не успевают перераспределиться, то необходимо совершить такую же работу, как при перемещении точечного заряда $Q$ в поле покоящегося точечного заряда $-Q$. А она, в свою очередь, равна изменению потенциальной энергии заряда $Q$, перемещающегося из точки на расстоянии $2d$ от покоящегося заряда $-Q$, в точку на расстоянии

$$\sqrt{(2d)^2 + (2d)^2} = \sqrt{8}d$$



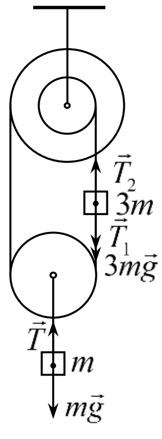

от этого заряда (см. рисунок). Поэтому необходимо совершить работу

$$A = Q\left(\frac{kQ}{2d} - \frac{kQ}{\sqrt{8}d}\right) = \frac{kQ^2}{d}\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$$

($k$ - постоянная закона Кулона). После перераспределения зарядов на плоскости потенциальная энергия взаимодействия заряда и плоскости вернется к первоначальному значению. Поэтому вся совершенная работа выделится в виде теплоты. Поэтому

$$q = \frac{kQ^2}{d}\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$$

**4.** Силы, действующие на тела, показаны на рисунке. Второй закон Ньютона для обоих тел дает




$$3m\vec{a}_1 = 3m\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2$$
$$m\vec{a}_2 = m\vec{g} + \vec{T}$$

где $a_1$ и $\vec{a}_2$ - ускорения тел с массами $3m$ и $m$ соответственно (остальные обозначения очевидны из рисунка). Или в проекциях на ось $x$, направленную вертикально вниз

$$3ma_{1x} = 3mg + T_1 - T_2$$
$$ma_{2x} = mg - T \qquad (*)$$

Установим условия связи между неизвестными. Поскольку нижний блок не имеет массы, а на него действуют две силы $\vec{T}_1$, направленные вверх, и сила $\vec{T}$, направленная вниз, то $T = 2T_1$. Верхний блок вращают силы $T_2$ с плечом $R/2$ и сила $T_1$ с плечом $R$.

А поскольку он также не имеет массы, то его можно вращать практически нулевым моментом. Поэтому

$$T_1 R = T_2 R/2 \qquad \Rightarrow \qquad T_2 = 2T_1$$

В результате система уравнений (*) принимает вид

$$\begin{aligned} 3ma_{1x} &= 3mg - T_1 \\ ma_{2x} &= mg - 2T_1 \end{aligned} \qquad (**)$$

Найдем теперь связь ускорений. Во-первых, ясно, что ускорения тел будут направлены противоположно. Действительно, если тело $3m$ опускается, то нить сматывается с маленького блока, но одновременно наматывается на большой блок. А поскольку блоки склеены, они поворачиваются на один и тот же угол, и на большой блок намотается больше веревки, и нижний блок поднимется. Поэтому если тело $3m$ спустилось на $\Delta l$, на большой блок намотается $2\Delta l$, веревка станет короче на $\Delta l$, нижний блок поднимется на $\Delta l/2$. Следовательно, если ускорение тела $3m$ равно $a$ и направлено вниз, ускорение тела $m$ равно $a/2$ и направлено вверх. И наоборот. Поэтому

$$a_{2x} = -a_{1x}/2$$

В результате система уравнений (**) примет вид

$$\begin{aligned} 3ma_{1x} &= 3mg - T_1 \\ ma_{1x}/2 &= 2T_1 - mg \end{aligned} \qquad (***)$$

Умножая первое уравнение системы (***) на 2 и складывая уравнения, найдем, что ускорение тела с массой $3m$ направлено вниз и равно

$$a_1 = \frac{10}{13} g\,,$$

а ускорение тела с массой $m$ направлено вверх и равно

$$a_2 = \frac{5}{13} g$$

**5.** Обозначим силу сопротивления среды как $F = \alpha v^2$. Тогда второй закон Ньютона для рассматриваемого тела в проекциях на ось, направленную вдоль движения тела, дает

$$\Delta v = -kv^2 \Delta t$$

где $k = \alpha/m$ ($m$ - масса тела). Или

$$-\frac{\Delta v}{v^2} = k\Delta t$$

Но величина в левой части есть приращение величины $1/v$ (вместе со знаком), величина в правой части – приращение величины $kt$. Поэтому приращение величины $kt - 1/v$ равно нулю

$$\Delta\left(kt - \frac{1}{v}\right) = 0$$

а, следовательно, сама величина в скобках есть постоянная

$$kt - \frac{1}{v} = C$$

Используя это соотношение для двукратного уменьшения скорости, получим

$$-\frac{1}{v} = kT - \frac{2}{v} \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{1}{kv}$$

Поэтому для шестикратного (по сравнению с начальной скоростью) уменьшения скорости имеем

$$kT - \frac{2}{v} = k\left(T + T_1\right) - \frac{6}{v} \qquad \Rightarrow \qquad T_1 = \frac{4}{kv}$$

где $T_1$ - искомое время, через которое скорость тела уменьшилась еще в три раза. Отсюда получаем

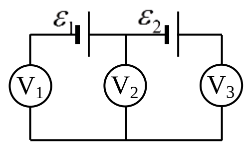
$$T_1 = 4T$$

**2.3. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 3**

**Задания**

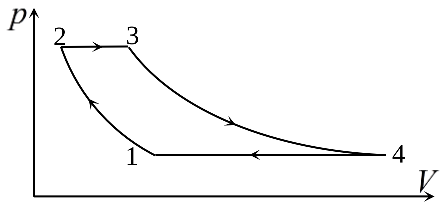
**1.** Автомобиль, движущийся по прямому шоссе, издает продолжительный звуковой сигнал. Датчики, распложенные по и против хода движения автомобиля, зарегистрировали длительности сигнала $\Delta t$ и $1,05\Delta t$. Какую длительность сигнала зарегистрировал, расположенный по, а какую против направления движения автомобиля? Найти скорость автомобиля, если скорость звука в воздухе равна $c$.

**2.** Электрическая цепь, схема которой приведена на рисунке, собрана из двух разных источников и трех одинаковых вольтметров. ЭДС правого источника известна и равна $\varepsilon_2 = 10$ В, правый вольтметр показывает напряжение $U_3 = 12$ В. Найти показания двух остальных вольтметров и ЭДС левого источника. Внутренним сопротивлением источников пренебречь.

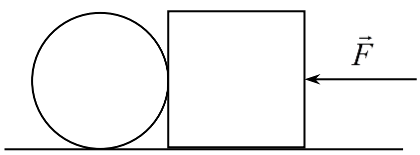



**3.** Легкую пружину подвесили за один конец к потолку. Если к свободному концу пружины прикрепить груз массой $m$, то ее длина будет равна $l_1$. Если от пружины отрезать одну четверть, а к ее оставшейся части прикрепить груз массой $2m$, ее длина будет равна $l_2$. Найти коэффициент жесткости первоначальной пружины.

**4.** С идеальным газом проводят циклический процесс 1-2-3-4-1, состоящий из двух изотерм (1-2 и 3-4) и двух изобар (2-3 и 4-1; см. рисунок). Известно, что отношение температур на изотермах 1-2 и 3-4 равно $T_{1\text{-}2}/T_{3\text{-}4} = 1/2$, а на участке изотермического расширения газ получал в 3 раза больше тепла, чем на участке изобарического нагревания 2-3. Найти КПД цикла..




**5.** На шероховатой горизонтальной поверхности находятся цилиндр массой $m$ и куб массой $2m$. Диаметр основания цилиндра равен стороне куба. Какой минимальной горизонтальной силой, проходящей через центры тел, нужно действовать на куб, чтобы при движении тел цилиндр не вращался? Коэффициенты трения между кубом и поверхностью, цилиндром и поверхностью, а также между цилиндром и кубом одинаковы и равны $\mu$.




**Ответы и решения**

**1.** За время, прошедшее между началом и концом звукового сигнала, автомобиль приблизился к датчику, расположенному по направлению его движения и удалился от противоположного. Поэтому «конец звукового сигнала» придет к датчику, расположенному по направлению движения автомобиля быстрее, чем он был издан автомобилем, и позже ко второму датчику. Поэтому датчик, расположенный по движению автомобиля зарегистрирует более, короткий сигнал, второй датчик – более длинный. Найдем длительность этих сигналов.

Пусть длительность звукового сигнала в системе отсчета, связанной с автомобилем, равна $\Delta\tau$, скорость автомобиля - $v$, скорость звука - $c$. Пусть, кроме того, автомобиль начал издавать звуковой сигнал, когда он находился на расстоянии $x$ от датчика, расположенного по направлению движения автомобиля, и $y$, от датчика, расположенного противоположно направлению его движения. Тогда начало звукового сигнала будет зарегистрировано датчиками через интервалы времени

$$t_{по} = \frac{x}{c}, \qquad t_{против} = \frac{y}{c}$$

после его излучения автомобилем. «Конец звукового сигнала» будет излучен, когда автомобиль будет находиться на расстоянии $x + v\Delta\tau$ и $y - v\Delta\tau$ от датчиков. Поэтому он придет к датчикам через интервалы времени

$$t'_{по} = \frac{x - v\Delta\tau}{c}, \qquad t'_{против} = \frac{y + v\Delta\tau}{c}$$

после излучения. Поэтому датчик, расположенный по направлению движения автомобиля, зарегистрирует следующую длительность сигнала

$$\Delta\tau_{по} = \Delta\tau + t'_{по} - t_{по} = \Delta\tau + \frac{x - v\Delta\tau}{c} - \frac{x}{c} = \Delta\tau - \frac{v\Delta\tau}{c} = \Delta\tau\left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

А датчик, расположенный против направления движения, следующую

$$\Delta\tau_{против} = \Delta\tau + t'_{против} - t_{против} = \Delta\tau + \frac{y + v\Delta\tau}{c} - \frac{y}{c} = \Delta\tau + \frac{v\Delta\tau}{c} = \Delta\tau\left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

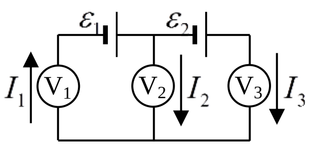
Отсюда заключаем, что бóльшую длительность $1{,}05\Delta t$ зарегистрирует датчик, расположенный против направления движения $1{,}05\Delta t = \Delta\tau_{против}$, а меньшую длительность $\Delta t$ - датчик, расположенный по направлению движения $\Delta t = \Delta\tau_{по}$. Также из этих формул следует, что

$$0{,}05\Delta t = \Delta\tau_{против} - \Delta\tau_{по} = \frac{2v}{c}\Delta\tau \text{ и } 2{,}05\Delta t = \Delta\tau_{против} + \Delta\tau_{по} = 2\Delta\tau$$

Поэтому

$$v = \frac{\left(\Delta\tau_{против} - \Delta\tau_{по}\right)c}{\Delta\tau_{против} + \Delta\tau_{по}} = \frac{0{,}05}{2{,}05}c = 0{,}024c = 7{,}2 \text{ м/с}$$

**2.** Поскольку напряжение, которое показывает правый вольтметр больше ЭДС правого источника, а ток через правый источник и вольтметр течет в одну сторону, то токи через вольтметры текут так, как показано на рисунке. Кроме того, поскольку сумма напряжений в любом замкнутом контуре равна нулю, имеем из правого замкнутого контура $U_2 = U_3 - \varepsilon_2 = 2$ В.




Далее, поскольку $I_1 = I_2 + I_3$, а вольтметры одинаковы, то $U_1 = U_2 + U_3 = 2U_3 - \varepsilon_2 = 14$ В. Используя далее условие равенства нулю суммы напряжений на всех элементах правого контура, получим $\varepsilon_1 = U_1 + U_2 = 3U_3 - 2\varepsilon_2 = 16$ В. Итак, $U_2 = U_3 - \varepsilon_2 = 2$ В, $U_1 = 2U_3 - \varepsilon_2 = 14$ В, $\varepsilon_1 = 3U_3 - 2\varepsilon_2 = 16$ В.

**3.** Пусть длина первоначальной пружины в недеформированном состоянии равна $l_0$, а ее коэффициент жесткости - $k$. Тогда условие равновесия для груза массой $m$ дает

$$mg = k\left(l_1 - l_0\right)$$

Поскольку коэффициент жесткости обратно пропорционален длине пружины, то коэффициент жесткости $k_1$ пружины с отрезанной одной четвертью равен

$$k_1 = \frac{4k}{3}$$

Поэтому условие равновесия груза массой $2m$ дает

$$2mg = \frac{4}{3}k\left(l_2 - \frac{3}{4}l_0\right)$$

Раскрывая скобки и вычитая первое условие равновесия из второго, получим

$$k = \frac{3mg}{4l_2 - 3l_1}, \qquad 4l_2 > 3l_1$$

**4.** Пусть на участке изобарического нагревания 2-3 газ получил количество теплоты $Q$. Тогда на участке изотермического расширения 3-4 газ получил количество теплоты $3Q$. И, следовательно, количество теплоты, полученное о нагревателя, в течение цикла, равно

$$Q_н = 4Q$$

Найдем работу газа за цикл. Очевидно, работа газа на участке 2-3 и работа газа на участке 4-1 равны по модулю. Действительно, работа газа в изобарическом процессе при давлении $p$ с изменением объема $\Delta V$ равна

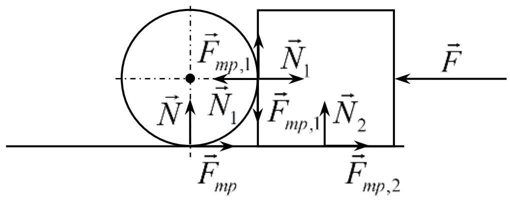
$$A = p\Delta V = \nu R\Delta T$$

т.е. определяется только разностью начальной и конечной температур, которая в процессах 2-3 и 4-1 отличается только знаком. Поэтому работа газа за цикл равна $A_{цикла} = A_{3-4} + A_{1-2}$. Работу газа в этих процессах найдем как площадь под графиком зависимости давление от объема. Очевидно, эти площади отличаются в 2 раза. Действительно, из закона Клапейрона-Менделеева следует, что объем газа в состоянии 3 в два раза больше объема в состоянии 2: $V_3 = 2V_2$, а объем в стоянии 4 в два раза больше объема в состоянии 1: $V_1 = 2V_4$. Следовательно, изменение объема газа в процессе 3-4 в два раза больше изменения объема газа в процессе 1-2: $\Delta V_{1-2} = 2\Delta V_{3-4}$. Поэтому если разбить изменение объема $\Delta V_{1-2}$ на малые элементы $\Delta V_i$, то изменение объема $\Delta V_{3-4}$ можно разбить на такое же количество элементов, каждый из которых вдвое больше соответствующего элемента $\Delta V_i$ - $2\Delta V_i$, а давление газа в пределах соответствующих элементов одинаковое. В результате для работы газа имеем

$$A_{1-2} = -2A_{3-4}$$

А поскольку процесс 3-4 изотермический, работа газа равна количеству теплоты, полученному в этом процессе: $A_{3-4} = 3Q$. Отсюда получаем $A_{цикла} = 3Q - 3Q/2 = 3Q/2$. Поэтому КПД цикла есть

$$\eta = \frac{A_{цикла}}{Q_н} = \frac{3Q/2}{4Q} = \frac{3}{8} = 0,375$$




**5.** Очевидно, при больших значениях внешней силы цилиндр будет скользить по поверхности. Найдем минимальной значение внешней силы, при котором цилиндр еще не вращается. Поскольку рассматриваемая ситуация – пограничная, все силы трения равны своим максимальным значениям - $\mu N$ (где $N$ - сила реакции на соответствующей поверхности).

Силы, действующие на тела, показаны на рисунке. На цилиндр действуют – сила тяжести, сила реакции поверхности, сила трения на поверхности, сила реакции сот стороны куба, сила трения со стороны куба (силы реакции и трения, действующие на цилиндр, показаны на левом рисунке, на куб – на правом). Второй закон Ньютона для цилиндра в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси, а также для куба в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси дает

$$\begin{aligned} ma &= N_1 - \mu N \\ N &= mg + \mu N_1 \\ nma &= F - N_1 - \mu N_2 \\ N_2 &= nmg - \mu N_1 \end{aligned}$$

(где $n = 2$). С другой стороны, поскольку цилиндр не вращается, сумма моментов все сил, действующих на него, равна нулю; поэтому $F_{тр,1} = F_{тр} \quad \Rightarrow \quad N_1 = N$. В результате из первых двух уравнений находим

$$a = g, \quad N = N_1 = \frac{mg}{1-\mu}$$

Поэтому из третьего и четвертого уравнений системы, получаем

$$F = nmg + N_1 + \mu N_2 = nma + N_1 + \mu\left(nmg - \mu N_1\right) = nmg\left(1+\mu\right) + N_1\left(1-\mu^2\right) = \left(n+1\right)mg\left(1+\mu\right)$$

В первом варианте $n = 2$, поэтому минимальная сила, при которой цилиндр не проскальзывает по поверхности, есть

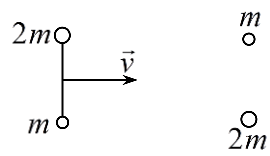
$$F = 3mg\left(1+\mu\right)$$

**2.4. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 4**

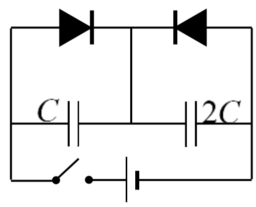
**Задания**

**1.** С двумя молями гелия проводят процесс, в котором его молярная теплоемкость не меняется и равна $C$. Известно, что гелий совершил в этом процессе работу $A$. Найти изменение температуры гелия в этом процессе.

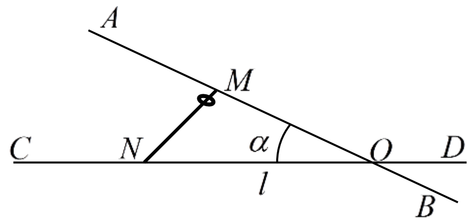
**2.** К концам невесомого стержня длиной $l$ прикреплены два маленьких шарика с массами $m$ и $2m$. Стержень, двигаясь поступательно в направлении перпендикулярном ему самому со скоростью $v$, налетает на два точно таких же покоящихся тела, находящихся на расстоянии $l$ друг от друга (см. рисунок). Одновременно происходят два центральных абсолютно неупругих столкновения. Найти силу натяжения стержня сразу после этого. Силу тяжести не учитывать.



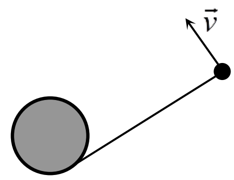

**3.** Электрическая цепь составлена из источника ЭДС $\varepsilon$, двух диодов и двух первоначально незаряженных конденсаторов с емкостью $C$ и $2C$ (см. рисунок). Ключ замыкают. Найти заряды конденсаторов $q_C$ и $q_{2C}$ после установления равновесия. Затем ключ размыкают, меняют полярность источника и снова замыкают ключ. Найти новые заряды конденсаторов $q'_C$ и $q'_{2C}$. Диоды идеальны: их сопротивление электрическому току в направлении стрелки в обозначении диода на схеме равно нулю, в обратном направлении – бесконечности.




**4.** (Г.Галилей «Беседы и математические доказательства двух новых наук», 1637 г.). Маленькое колечко движется по гладкой спице MN. Начало движения колечка – точка М - лежит на прямой АВ, наклоненной под углом $\alpha$ к горизонту, конец – точка N – на горизонтали CD, на расстоянии $l$ от точки O пересечения горизонтали CD с наклонной прямой АВ. На каком расстоянии от точки O должна быть расположена точка М, чтобы время движения колечка от точки М до точки N было минимальным?




**5.** На поверхности стола расположен вертикальный цилиндр радиуса $R$, на который намотана длинная невесомая нерастяжимая нить. К концу свободного куска нити, длина которого равна $l_0$, привязано тело. Телу сообщают скорость $v$, направленную перпендикулярно нити так, что нить начинает наматываться на цилиндр (см. рисунок, вид сверху). Найти время, за которое на цилиндр намотается одна пятая часть нити. Трение отсутствует.



**Ответы и решения**

**1.** Применяем к рассматриваемому процессу первый закон термодинамики

$$Q = \Delta U + A$$

С другой стороны, для гелия (одноатомный газ)

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T$$

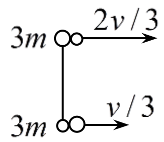
И

$$Q = C\nu\Delta T$$

Отсюда

$$\Delta T = \frac{A}{\nu\left(C - 3R/2\right)}, \quad C > \frac{3R}{2}$$

**2.** Поскольку столкновения шариков абсолютно неупругие, после удара они будут двигаться вместе. Скорости шариков найдем по закону сохранения импульса: два верхних (см. рисунок) шарика будут иметь скорость $2v/3$, два нижних (см. рисунок) - $v/3$. А поскольку скорости шариков будут разными, движение гантельки будет уже не поступательным. В системе отсчета, связанной с центром масс гантельки, ее движение есть вращение вокруг центра. Найдем скорости шариков в этой системе отсчета. Скорость центра масс равна

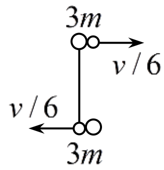



$$v_c = \frac{1}{2}\left(\frac{2v}{3} + \frac{v}{3}\right) = \frac{v}{2}$$

Поэтому скорость шариков в этой системе отсчета равна

$$v_{верх} = \frac{2v}{3} - \frac{v}{2} = \frac{v}{6}, \qquad v_{нижн} = \frac{v}{2} - \frac{v}{3} = \frac{v}{6},$$

(см. рисунок). Другими словами, каждая пара шариков массой $3m$ движется со скоростью $v/6$ по окружности радиуса $l/2$ и, следовательно, сила натяжения стержня равна




$$T = \frac{3m\left(v/6\right)^2}{l/2} = \frac{mv^2}{6l}$$

**3.** При замыкании ключа ток пойдет через левый диод, а правый диод будет «закрыт» - на месте правого диода будет фактически разрыв цепи. Поскольку сопротивление диода в прямом направлении равно нулю, потенциалы обкладок левого конденсатора одинаковы – левый конденсатор не будет заряжен $q_{лев} = 0$, а все напряжение источника оказывается приложенным к правому конденсатору. Поэтому

$$q_{прав} = 2\varepsilon C$$

После изменения полярности источника открывается правый диод, но закрывается левый. Поэтому будет заряжаться левый конденсатор, и разряжаться правый. Но правый конденсатор может разрядиться только так, что положительный заряд его левой обкладки может перетечь только на правую обкладку левого конденсатора, а вытечь через диоды не может (диоды не пропустят положительный заряд от точки соединения конденсаторов). Если бы емкость левого конденсатора была больше емкости правого, он «взял» бы себе весь заряд правого и какая-то часть заряда протекла через правый диод. Но у нас емкость правого конденсатора больше емкости левого, поэтому правый конденсатор разрядится не до конца. Найдем заряды конденсаторов после установления равновесия.

Пусть на левой обкладке левого конденсатора будет заряд $q'_{лев} = -x$ (на правой - $x$). Тогда на левой обкладке правого конденсатора будет заряд $q'_{прав} = 2\varepsilon C - x$ (на правой - $-\left(2\varepsilon C - x\right)$). Условие равновесия зарядов дает

$$-\frac{2\varepsilon C - x}{2C} + \frac{x}{C} = \varepsilon$$

Отсюда

$$-2\varepsilon C + x + 2x = 2C\varepsilon \quad x = \frac{4\varepsilon C}{3}$$

Следовательно, заряды левого и правого конденсатора после изменения полярности источника равны

$$q'_{лев} = \frac{4\varepsilon C}{3}$$ (у левой обкладки отрицательный, у правой – положительный)

$$q'_{прав} = \frac{2\varepsilon C}{3}$$ (у левой обкладки положительный, у правой – положительный)

**4.** Пусть длина отрезка MO равна $x$. Длину отрезка MN находим по теореме косинусов

$$MN = \sqrt{l^2 + x^2 - 2lx\cos\alpha}$$

А угол MNO (обозначим его $\beta$) – по теореме синусов

$$\frac{x}{\sin\beta} = \frac{\sqrt{l^2 + x^2 - 2lx\cos\alpha}}{\sin\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad \sin\beta = \frac{x\sin\alpha}{\sqrt{l^2 + x^2 - 2lx\cos\alpha}}$$

Поскольку ускорение колечка при его движении по спице MN равно $g\sin\beta$, то время его спуска можно найти из соотношения

$$\sqrt{l^2 + x^2 - 2lx\cos\alpha} = \frac{g\sin\beta t^2}{2}$$

Используя далее соотношение для $\sin\beta$, получим

$$t^2 = \frac{2\left(l^2 + x^2 - 2lx\cos\alpha\right)}{gx\sin\alpha}$$

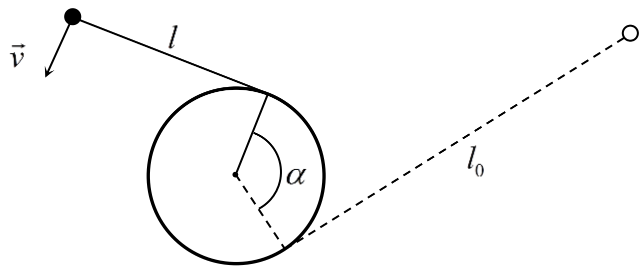
Найдем $x$, отвечающее минимуму этой функции. Дифференцируя и приравнивая производную к нулю, получим

$$\frac{2x - 2l\cos\alpha 2}{gx\sin\alpha} - \frac{\left(l^2 + x^2 - 2lx\cos\alpha\right)}{gx^2\sin\alpha} = \frac{2x^2 - 2lx\cos\alpha 2 - l^2 - x^2 + 2lx\cos\alpha}{gx^2\sin\alpha} = \frac{x^2 - l^2}{gx^2\sin\alpha} = 0$$

Откуда получаем

$$MO = l$$

**5.** Установим зависимость угла поворота нити от времени. Во-первых, заметим, что нить в процессе движения тела всегда перпендикулярна скорости тела (нить не «сминается» и не растягивается). Поэтому сила натяжения не совершает над телом работу, и, следовательно, тело движется с постоянной скоростью. Угловая же скорость тела изменяется, поскольку его движение в течение каждого малого интервала времени есть вращение вокруг той точки, где нить отходит от цилиндра, а длина нити изменяется.




Пусть к некоторому моменту времени $t$ нить повернулась на угол $\alpha$ по сравнению с первоначальным положением. Установим связь между $t$ и $\alpha$. Поскольку к этому моменту на цилиндр намоталась нить длиной $\alpha R$, то для длины нити справедливо соотношение

$$l = l_0 - \alpha R \qquad (1)$$

Из формулы (1) следует, что угловая скорость нити в этот момент будет равна $\omega = v/(l_0 - \alpha R)$. Поэтому за бесконечно малый интервал времени $\Delta t$ около момента времени $t$ нить повернется на бесконечно малый угол

$$\Delta\alpha = \omega\Delta t = \frac{v\Delta t}{l_0 - \alpha R}$$

(2)

Из формулы (2) можно найти производную функции $t(\alpha)$:

$$t'(\alpha) = \frac{\Delta t}{\Delta\alpha} = \frac{l_0}{v} - \frac{R}{v}\alpha$$

(3)

Из формулы (3) следует, что производная функции $t(\alpha)$ зависит от своего аргумента $\alpha$ так же, как скорость равноускоренно движущегося тела зависит от времени

$$x'(t) = v_0 + at \qquad (4)$$

Поэтому зависимость $t(\alpha)$ - такая же, как и зависимость координаты равноускоренно движущегося тела от времени

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \tag{5}$$

Причем, как это следует из сравнения (3) и (4), в качестве $v_0$ и $a$ в зависимости $t(\alpha)$ нужно использовать величины $l_0 / v$ и $-R / v$:

$$t(\alpha) = t_0 + \frac{l_0}{v}\alpha - \frac{R}{v}\frac{\alpha^2}{2} \tag{6}$$

Величина $t_0$ в выражении (5) имеет смысл «начального» значения времени, т.е. времени, отвечающего повороту на нулевой угол. Поэтому эту величину нужно положить равной нулю. В результате имеем окончательно

$$t(\alpha) = \frac{l_0}{v}\alpha - \frac{R}{v}\frac{\alpha^2}{2}$$

(7)

Из зависимости (7) легко найти время $\tau$, необходимое для полной намотки одной пятой части нити на цилиндр. Когда такая длина намотается на цилиндр, нить повернется на угол $\alpha = l_0 / 5R$. Поэтому для времени $\tau$ имеем из (7):

$$\tau = \frac{l_0}{v}\frac{l_0}{5R} - \frac{R}{v}\frac{l_0^2}{50R^2} = \frac{9l_0^2}{50vR}$$