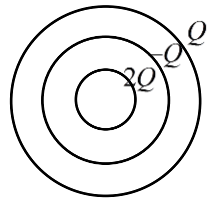
2.12. Олимпиада имени И.В.Савельева (отборочный тур олимпиады «Росатом»), 11 класс

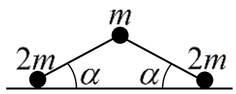
Задания

1. Болид формулы-1 проехал участок длиной l. Известно, что скорость болида в начале участка v, в конце - $2v$. За какое минимальное время болид может проехать участок, если его скорость на участке не уменьшалось, а ускорение не превышало значение a_0. Ответ обосновать.

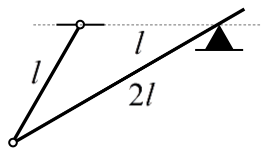
2. Вес сосуда, из которого откачан воздух, равен $P_1 = 1,02$ Н. Вес этого сосуда, заполненного воздухом при атмосферном давлении, равен $P_2 = 1,06$ Н, а неизвестным газом при атмосферном давлении - $P_3 = 1,10$ Н. Найти молярную массу неизвестного газа. Молярная масса воздуха - $\mu = 29$ г/моль. Газы считать идеальными, толщиной стенок сосуда пренебречь.



3. Три металлических сферы с радиусами R, $2R$ и $3R$, имеющие общий центр, заряжены зарядами $2Q$, $-Q$, Q (см. рисунок). Найти разность потенциалов $\Delta\varphi = \varphi_Q - \varphi_{-Q}$ между сферой с зарядом Q и сферой с зарядом $-Q$.



4. Три маленьких шарика с массами $2m$, m и $2m$ соединены шарнирно одинаковыми невесомыми стержнями. Шарики поставили на гладкий горизонтальный пол так, что углы между стержнями и поверхностью равны α (см. рисунок). Шарики отпускают. Найти ускорения шариков сразу после этого. Трение отсутствует.



5. Стержни, имеющие длины l и $2l$ и массы m и $2m$ соответственно, соединены шарниром. Короткий стержень подвешен шарнирно к потолку, а длинный опирается на точечную опору, расположенную на расстоянии l от точки крепления короткого стержня к потолку на одной с ней горизонтали. Найти угол, который составляет длинный стержень с горизонталью в равновесии. Трением пренебречь.

Ответы и решения

1. Чтобы проехать участок за минимальное время, болид должен как можно быстрее набрать максимальную скорость. Поэтому стратегия болида должна заключаться в том, чтобы сначала двигаться равноускоренно до скорости $2v$, а затем – равномерно с этой скоростью. Время разгона болида до скорости $2v$ и пройденный за это время путь найдем из законов равноускоренного движения

$$\Delta t_1 = \frac{2v - v}{a_0} = \frac{v}{a_0}, \quad S = \frac{4v^2 - v^2}{2a_0} = \frac{3v^2}{2a_0}$$

Поскольку по условию болид за время разгона не успел проехать участок, на параметры задачи есть такое ограничение

$$S < l \qquad \Rightarrow \qquad 3v^2 < 2a_0 l$$

Равномерно болид должен будет пройти участок пути $l-S$ со скоростью $2v$. Поэтому на такое движение болид затратит следующее время

$$\Delta t_2 = \frac{l-S}{2v} = \frac{l}{2v} - \frac{3v}{4a_0}$$

А полное минимальное время движения болида по участку равно

$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{v}{a_0} + \frac{l}{2v} - \frac{3v}{4a_0} = \frac{v}{4a_0} + \frac{l}{2v}$, и должно быть выполнено условие $3v^2 < 2a_0 l$.

2. Пусть масса сосуда (без воздуха) - M, воздуха в сосуде при атмосферном давлении - m, неизвестного газа при атмосферном давлении - m_1. В первом случае на сосуд сила тяжести сосуда Mg и сила Архимеда, равная весу атмосферного воздуха в объеме сосуда - mg. Поэтому

$$P_1 = Mg - mg$$

Во втором случае сосуд содержит атмосферный воздух. Поэтому

$$P_2 = (M+m)g - mg = Mg$$

Отсюда находим

$$Mg = P_2,\ mg = P_2 - P_1$$

Аналогично для случая, когда в сосуде находится неизвестный газ, имеем

$$P_3 = (M+m_1)g - mg = Mg + (m_1 - m)g = Mg + mg\left(\frac{m_1}{m} - 1\right) = P_2 + (P_2 - P_1)\left(\frac{m_1}{m} - 1\right)$$

Из закона Клапейрона-Менделеева для воздуха и неизвестного газа в сосуде имеем

$$m = \frac{pV\mu}{RT},\ m_1 = \frac{pV\mu_1}{RT}$$

где p - атмосферное давление, V - объем сосуда, T - температура, R - универсальная газовая постоянная, μ и μ_1 - молярные массы воздуха и неизвестного газа. Отсюда заключаем, что отношение масс неизвестного газа и воздуха в сосуде (при одинаковых давлении и температуре) равно отношению молярных масс неизвестного газа и воздуха. Поэтому

$$P_3 = P_2 + (P_2 - P_1)\left(\frac{\mu_1}{\mu} - 1\right)$$

Выражая из этого соотношения молярную массу неизвестного газа, получим

$$\mu_1 = \mu\left(1 + \frac{P_3 - P_2}{P_2 - P_1}\right) = 58 \text{ г/моль}$$

3. Потенциалы средней и внешней сферы определяются соотношениями

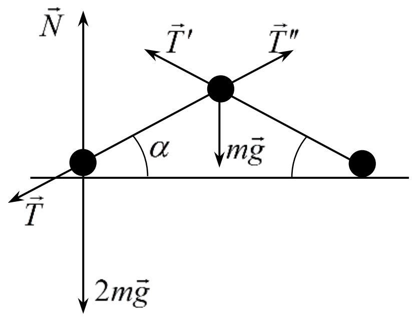
$$\varphi_{-Q} = \frac{k2Q}{2R} + \frac{k(-Q)}{2R} + \frac{kQ}{3R} = \frac{5kQ}{6R},\quad \varphi_Q = \frac{k2Q}{3R} + \frac{k(-Q)}{3R} + \frac{kQ}{3R} = \frac{2kQ}{3R}$$

Отсюда находим

$$\Delta\varphi = \varphi_Q - \varphi_{-Q} = \frac{2kQ}{3R} - \frac{5kQ}{6R} = -\frac{kQ}{6R}$$

(k - постоянная закона Кулона).

4. Силы, действующие на центральный и один из боковых шариков, показаны на рисунке (здесь $\vec{T}$, $\vec{T}'$ и $\vec{T}''$ - силы натяжения стержней, которые из-за симметрии задачи и невесомости стержней имеют одинаковые модули). Поэтому второй закон Ньютона для бокового и верхнего шарика в проекциях на горизонтальное направление для бокового шарика и на вертикальное – для центрального, дает



$$2ma_1 = T\cos\alpha$$
$$ma_2 = mg - 2T\sin\alpha \qquad (*)$$

где a_1 и a_2 - ускорения бокового и центрального шариков соответственно.

Найдем связь между ускорениями шариков. За небольшое время Δt после начала движения (пока расположение стержней практически не изменяется) шарики приобретут скорости

$$v_1 = a_1\Delta t$$
$$v_2 = a_2\Delta t \qquad (**)$$

А поскольку стержни несжимаемые, проекции скоростей шариков на направление стержня одинаковы. Поэтому $v_1\cos\alpha = v_2\sin\alpha$, а из формулы (**) заключаем, что такая же связь будет и между ускорениями

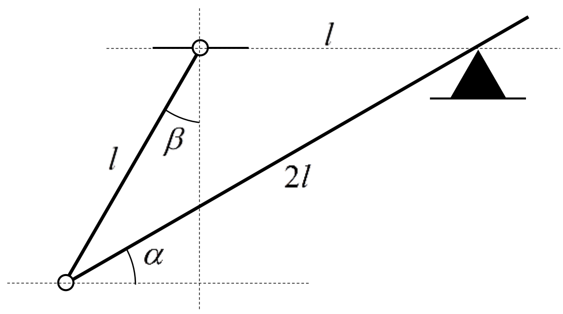
$$a_1\cos\alpha = a_2\sin\alpha \qquad (***)$$

Решая систему уравнений (*), (***), получим

$$a_1 = \frac{g\cos\alpha\sin\alpha}{\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha}, \quad a_2 = \frac{g\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha}$$

5. Проще всего положение равновесия системы стержней искать не из уравнений сил и моментов, а из условия минимума потенциальной энергии системы стержней.

Пусть, угол наклона длинного стержня к горизонтали равен α. Из равнобедренности треугольника, образованного стержнями и отрезком, соединяющем шарнир и опору, следует, что угол наклона короткого стержня к вертикали равен



$$\beta = \frac{\pi}{2} - 2\alpha.$$

Потенциальную энергию системы стержней найдем как сумму потенциальных энергий каждого стержня, а последние – как потенциальные энергии материальных точек массой m и $2m$, расположенных в центрах масс стержней (т.е. посередине). Начало отсчета потенциальной энергии выберем в точке шарнира, к которому подвешен короткий стержень. Тогда потенциальная энергия короткого стержня есть

$$\Pi_1 = -mg\frac{l}{2}\cos\beta = -mg\frac{l}{2}\sin 2\alpha$$

Середина второго стержня находится ниже шарнира, к которому крепится короткий стержень, на расстоянии $l\cos\beta - l\sin\alpha$. Поэтому потенциальная энергия длинного стержня равна

$$\Pi_2 = -2mgl\left(\cos\beta - \sin\alpha\right) = -2mgl\left(\sin 2\alpha - \sin\alpha\right)$$

Отсюда находим потенциальную энергию системы стержней

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = -\frac{5}{2}mgl\sin 2\alpha + 2mgl\sin\alpha$$

Для нахождения минимума дифференцируем и приравниваем производную к нулю

$$\Pi' = -5mgl\cos 2\alpha + 2mgl\cos\alpha = 0$$

Раскрывая косинус двойного угла и используя основное тригонометрическое тождество, получим квадратное уравнение относительно $\sin\alpha$

$$10\cos^2\alpha - 2\cos\alpha - 5 = 0$$

Отсюда

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1+\sqrt{51}}{10}\right)$$

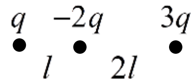
(второй корень квадратного уравнения является отрицательным).

2.13. Отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 1

Задания

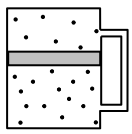
1. На горизонтальном транспортере, движущемся со скоростью $v=5$ м/с, на расстояниях $l=10$ см друг от друга находятся точечные детали. В некоторый момент транспортер мгновенно останавливается. Сколько деталей упадет с транспортера после остановки? Коэффициент трения между деталями и лентой транспортера $k=0,3$.

2. Три заряда q, $-2q$ и $3q$ расположены на расстояниях l и $2l$ друг от друга на одной прямой (см. рисунок). Найти работу, которую необходимо совершить, чтобы поменять местами заряды $-2q$ и $3q$.

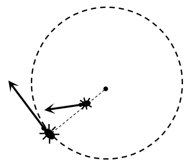


3. Идет вертикальный дождь. Скорость капель дождя v. Если цилиндрическое ведро площадью сечения S поставить на горизонтальную поверхность, то в ведро за секунду попадет масса воды μ. Какая масса воды в секунду попадает в воздухозаборник самолета площадью $2S$, если воздухзаборник ориентирован горизонтально, а самолет движется по взлетной полосе со скоростью $5v$?

4. Вертикальный цилиндрический сосуд разделен подвижным поршнем массой m и площадью S на два отсека. Под действием силы тяжести поршень медленно опускается. При этом давления газа в отсеках остаются неизменными, что обеспечивается перетеканием газа из нижней части сосуда в верхнюю по очень тонкой трубке. Температуры газа в отсеках поддерживаются постоянными: T в верхнем и $1,2T$ в нижнем. Найти давление газа в отсеках.



5. Один жук ползет с постоянной скоростью v по окружности радиуса R. В некоторый момент времени из центра окружности начинает ползти второй жук и движется так, что он, во-первых, в любой момент времени остается на одном радиусе с первым жуком, а во-вторых, величина его скорости постоянна и равна $v/2$ (см. рисунок). Как будут двигаться жуки? Через какое время второй жук окажется на максимальном расстоянии от центра?



Ответы и решения

1. После остановки транспортера детали продолжают двигаться с его скоростью и далее тормозятся силой трения. Тормозной путь каждой детали определяется известным выражением

$$S=\frac{v^2}{2kg}=2,67 \text{ м}$$

Поэтому количество свалившихся с транспортера деталей N будет не меньше целой части отношения

$$N=\left[\frac{S}{l}\right]=\left[\frac{v^2}{2kgl}\right]=26 \qquad (*)$$

При этом здесь возможны две ситуации. Если в момент остановки транспортера ближайшая к его концу деталь находится на расстоянии, меньшем, чем $S/l-\left[S/l\right]=0,07$ м от его конца, то упадет число деталей (*), если в момент остановки транспортера ближайшая к его концу деталь находится на малом расстоянии от его конца, большем 7 см, то упадет $N+1$ деталь.

2. Потенциальная энергия системы точечных зарядов равна потенциальной энергии взаимодействия каждой пары зарядов. При перемене местами зарядов $-2q$ и $3q$ энергия их взаимодействия не изменится, а изменится только энергия их взаимодействия с зарядом q. Найдем эту энергию вначале и в конце.

Вначале: $W_{q,-2q} = -\dfrac{2kq^2}{l}$, $W_{q,3q} = \dfrac{3kq^2}{3l}$. (*)

В конце: $W_{q,-2q} = -\dfrac{2kq^2}{3l}$, $W_{q,3q} = \dfrac{3kq^2}{l}$.

(**)

Работа, которую необходимо совершить, для того чтобы поменять местами заряды, равна разности потенциальных энергий системы в конце и в начале процесса. Вычитая из суммы энергий (**) сумму энергий (*), получим

$$A = \frac{10kq^2}{3l}$$

3. Если капли падают вертикально, то в цилиндрическое вертикальное ведро площадью S за время Δt попадают все капли, находящиеся внутри прямого цилиндра с образующей $v\Delta t$. Поэтому, если плотность капель дождя (суммарная масса капель в кубическом метре воздуха) равна ρ, то в ведро за время Δt попадает следующая масса дождя

$$\Delta m = \rho v \Delta t S,$$

а в единицу времени

$$\mu = \rho v S$$

Отсюда находим

$$\rho = \frac{\mu}{vS} \qquad (*)$$

Если капли падают не вертикально, то в ведро за время Δt попадают все капли, находящиеся внутри косого цилиндра с образующей $v_1\Delta t$, где v_1 - скорость капель относительно ведра. Поэтому в таком случае в ведро в единицу времени попадает следующая масса дождя

$$\mu_1 = \rho v_1 S \cos\alpha$$

где α - угол между скоростью капель и площадью ведра.

Поскольку в системе отсчета, связанной с воздухозаборником, скорость капель равна по величине $\sqrt{26}v$, направлена под углом

$$\alpha = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)$$

к его поверхности, площадь воздухозаборника - $2S$, то в воздухозаборник самолета попадает в единицу времени следующая масса воды

$$\mu_1 = \rho\sqrt{26}v2S\frac{5}{\sqrt{26}} = 10\rho vS$$

Подставляя в эту формулу плотность капель из (*), получим

$$\mu_1 = 10\mu$$

4. Поскольку поршень движется медленно, то он в любой момент времени находится в равновесии. Поэтому

$$mg = \left(p_н - p_в\right)S \qquad (*)$$

где $p_н$ и $p_в$ - давления газа снизу и сверху от поршня, S - площадь сосуда. Поскольку давления и температуры газов над и под поршнем не изменяются, то не изменяются и концентрации газов. А поскольку изменения объемов верхнего и нижнего отсеков одинаковы по величине, и все молекулы из нижнего отсека переходят в верхний, то концентрации газов над и под поршнем одинаковы. Используя далее основное уравнение МКТ $p = nkT$, где n - концентрация молекул газа, k - постоянная Больцмана, T - абсолютная температура, получим из (*)

$$n = \frac{mg}{kS\left(T_н - T_в\right)} = \frac{mg}{0,2kST} = \frac{5mg}{kST}$$

Теперь из основного уравнения МКТ находим давления

$$p_н = nkT_н = \frac{5mgT_н}{ST} = \frac{6mg}{S}, \qquad p_в = nkT_в = \frac{5mgT_в}{ST} = \frac{5mg}{S}$$

5. Так как жуки находятся в любой момент времени на одном и том же радиусе, они имеют одинаковую угловую скорость. Но поскольку расстояние от второго жука до центра r непрерывно увеличивается, то должна увеличиваться и составляющая скорости, перпендикулярная радиусу $v_\perp$ (именно она определяет угловую скорость - $\omega = v/R = v_\perp/r$). Поэтому будет уменьшаться составляющая скорости жука, параллельная радиусу $v_\parallel$. Значит по радиусу второй жук движется, замедляясь. В тот момент, когда расстояние от него до центра станет равно $R/2$, составляющая скорости параллельная радиусу станет равна нулю, и второй жук также начнет двигаться по окружности радиуса $R/2$. Таким движения жуков и останется в дальнейшем.

Чтобы найти, за какое время второй жук достигает максимального удаления от центра, найдем $v_\parallel$

$$v_\parallel = \sqrt{\left(v/2\right)^2 - \omega^2 r^2} \qquad (*)$$

Дифференцируя функцию (*) по времени (при этом правая часть формулы (*) зависит от времени через r и является сложной функцией времени), получим ускорение жука

$$a = \frac{dv_\parallel}{dt} = -\frac{\omega^2 r}{\sqrt{\left(v/2\right)^2 - \omega^2 r^2}}\frac{dr}{dt} = -\frac{\omega^2 r}{\sqrt{\left(v/2\right)^2 - \omega^2 r^2}}v_\parallel \qquad (**)$$

Подставляя теперь корень в знаменатель формулы (**) из (*), получим

$$a = -\omega^2 r \qquad (***)$$

Уравнение вида (***), связывающее ускорение жука и расстояние от него до центра окружности, характерно для гармонических колебаний. Поэтому зависимость расстояния от жука до центра от времени будет такой же, как для тела, совершающего гармонические колебания

$$r(t) = \left(R/2\right)\sin\omega t$$

а жук достигнет максимального отклонения от центра за четверть «периода»

$$t = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi R}{2v}$$

2.14. Отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 2

Задания

1. На горизонтальной поверхности лежит неоднородное бревно. Чтобы оторвать от поверхности один его конец к нему нужно приложить минимальную вертикальную силу F, за другой конец - $2F$. Найти массу бревна и отношение расстояний от центра тяжести бревна до его концов.

2. На краю горизонтальной доски длиной l лежит тело. Коэффициент трения покоя между телом и доской равен $\mu_{пок} = \mu$ и несколько больше коэффициента трения скольжения $\mu_{ск} = 0,85\mu$. Доску медленно поднимают за тот конец, на, на котором лежит тело, превращая ее в наклонную плоскость, а когда тело начинает скользить, поднимание доски прекращают. Найти время, за которое тело достигнет второго края доски.

3. Две одинаковые пластинки площадью S расположены параллельно друг другу на малом расстоянии d друг от друга. Пластинки заряжены зарядами Q и $-3Q$. Найти разность потенциалов между пластинкой с зарядом $-3Q$ и пластинкой с зарядом Q. Краевыми эффектами пренебречь.

4. Из двух металлов с плотностью 2ρ и 6ρ изготовлен сплав. Вес сплава - P. Вес сплава в воде - P_1. Найти массы металлов – компонентов сплава. Плотность воды - ρ. Считать, что объем сплава равен сумме объемов компонент.

5. С одним молем одноатомного идеального газа происходит процесс, в котором давление газа зависит от объема по закону $p = \alpha - \beta V^2$, где α и β - положительные постоянные. Объем газа возрастает. При каких значениях объема газ получает, а при каких отдает тепло?

Ответы и решения

1. Пусть масса бревна m, длина - l, расстояние от его толстого конца до центра тяжести - l_1. Тогда для сил F и $2F$ выполнены условия

$$Fl = mgl_1$$
$$2Fl = mg\left(l - l_1\right) = mgl - mgl_1$$

Складывая эти уравнения, получим

$$m = \frac{3F}{g}$$

И

$$l_1 = \frac{l}{3}, \qquad l - l_1 = l_2 = \frac{2l}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{2}$$

2. В тот момент, когда тело начинает скользить по плоскости, выполнено условие

$$tg\,\alpha = \mu_{пок} \qquad (*)$$

Как только тело сдвигается, коэффициент трения между телом и доской уменьшается. Ускорение тела находим по второму закону Ньютона

$$a = g\sin\alpha - \mu_{ск} g\cos\alpha$$

Выражая синус и косинус через тангенс и используя (*), получим для ускорения

$$a = \frac{g\left(\mu_{пок} - \mu_{ск}\right)}{\sqrt{1+\mu_{пок}^2}}$$

Отсюда по законам равноускоренного движения находим

$$l = \frac{at^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad t = \sqrt{\frac{2l\sqrt{1+\mu_{пок}^2}}{g\left(\mu_{пок} - \mu_{ск}\right)}} = \sqrt{\frac{2l\sqrt{1+\mu^2}}{0{,}15 g\mu}} = \sqrt{\frac{40l\sqrt{1+\mu^2}}{3g\mu}}$$

3. В области между пластинками поля одной и второй пластинки направлены одинаково, поэтому напряженность равна

$$E = \frac{Q}{2S\varepsilon_0} + \frac{3Q}{2S\varepsilon_0} = \frac{2Q}{S\varepsilon_0}$$

и направлена к пластинке с зарядом $-3Q$. Мысленно перенесем пробный заряд величиной e с пластинки с зарядом $-3Q$ на пластинку с зарядом Q. Тогда поле совершит работу

$$A = -\frac{2Qed}{S\varepsilon_0}$$

С другой стороны, эта работа равна произведению пробного заряда на разность потенциалов между пластинами

$$A = e\left(\varphi_{-3Q} - \varphi_Q\right)$$

Отсюда находим

$$\varphi_{-3Q} - \varphi_Q = -\frac{2Qd}{S\varepsilon_0}$$

4. Вес любого однородного тела в воде определяется разностью его силы тяжести и силы Архимеда. Последняя равна силе тяжести, действующей на воду в объеме тела. Поэтому вес однородного тела в воде равен

$$P_1 = \left(\rho_т - \rho_в\right) gV$$

где $\rho_т$ и $\rho_в$ - плотности тела и воды. Для сплава, объем которого равен сумме объемов компонент, имеем аналогичное соотношение

$$P_1 = \left(\rho_1 - \rho_в\right) gV_1 + \left(\rho_2 - \rho_в\right) gV_2$$

где $\rho_1 = 2\rho$ и $\rho_2 = 6\rho$, V_1 и V_2 - плотности и объемы компонент сплава. Поэтому для данного в условии сплава имеем

$$\frac{P_1}{\rho g} = V_1 + 5V_2$$

$$\frac{P}{\rho g} = 2V_1 + 6V_2$$

(второе соотношение представляет собой очевидное условие равенства массы сплава сумме масс компонент). Из системы уравнений находим объемы

$$V_1 = \frac{5P - 6P_1}{4\rho g}; \qquad V_2 = \frac{2P_1 - P}{4\rho g},$$

А затем и массы компонент сплава

$$m_1 = 2\rho V_1 = \frac{(5P - 6P_1)}{2g}; \qquad m_2 = 6\rho V_2 = \frac{3(2P_1 - P)}{2g}$$

5. Рассмотрим некоторое значение объема газа V_0 и рассмотрим процесс расширения газа по заданному закону, в котором его объем увеличивается на малую величину ΔV. По первому закону термодинамики найдем количество теплоты, которое получает газ в этом процессе. По знаку этой величины можно будет сказать о том, получает или отдает газ тепло.

Количество теплоты Q, которое получает газ в этом процессе, определяется первым законом термодинамики

$$Q = \Delta U + A$$

где ΔU - изменение внутренней энергии газа в этом процессе, A - работа газа. Изменение внутренней энергии газа в рассматриваемом процессе найдем с использованием закона Клапейрона-Менделеева и уравнения процесса

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T = \frac{3}{2}\left[p(V_0 + \Delta V)(V_0 + \Delta V) - p(V_0)V_0\right]$$

где $p(V) = \alpha - \beta V^2$ - зависимость давления от объема. Подставляя зависимость давления от объема, раскрывая скобки и выбрасывая слагаемые, содержащие квадрат или куб малой величины ΔV^2 или ΔV^3 (малые по сравнению со слагаемыми, содержащими ΔV), получим

$$\Delta U = \frac{3}{2}\Delta V\left(\alpha - 3\beta V_0^2\right)$$

Так как изменение объема газа ΔV мало, его давление практически не меняется в этом процессе, и работу газа можно найти как

$$A = p(V_0)\Delta V = \left(\alpha - \beta V_0^2\right)\Delta V$$

В результате имеем из первого закона термодинамики

$$Q = \frac{1}{2}\Delta V\left(5\alpha - 11\beta V_0^2\right)$$

Из этой формулы заключаем, что количество теплоты, получаемое газом при расширении ($\Delta V > 0$), будет положительным (газ получает тепло), если

$$V_0 < \sqrt{\frac{5\alpha}{11\beta}}$$

Если

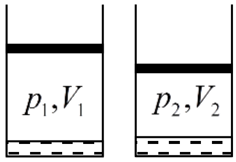
$$V_0 > \sqrt{\frac{5\alpha}{11\beta}} \text{ (но, конечно, } V_0 < \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\text{, т.к. } p > 0\text{)},$$

то количество теплоты, получаемое газом в этом процессе, отрицательно, т.е. газ отдает тепло.

2.15. Отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 3

Задания

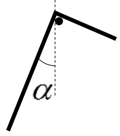
1. В сосуде под поршнем находится воздух, насыщенный водяной пар и вода. Суммарное давление воздуха и пара равно p_1, объем воздуха и пара V_1. Сдвигая поршень, объем воздуха и пара изотермически уменьшают до величины V_2, при этом в сосуде устанавливается давление p_2. Найти давление насыщенного пара при этой температуре. Воздух можно считать идеальным газом.



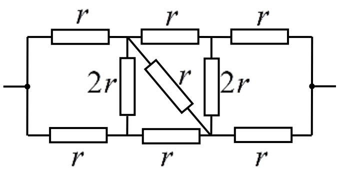
2. На гладком горизонтальном столе лежит соломинка длиной l и массой M. На противоположных концах соломинки сидят два жука с массами m и $2m$. В некоторый момент времени жуки начинают ползти по соломинке навстречу друг другу со скоростями $3v$ и v относительно соломинки соответственно. Найти перемещение соломинки к моменту встречи жуков.

3. Автомобиль, движущийся равномерно по прямой дороге со скоростью v, издает продолжительный звуковой сигнал. Два датчика, расположенные на дороге впереди и позади автомобиля, зарегистрировали длительность сигнала T (один датчик) и $1{,}1T$ (второй датчик). Найти скорость звука в воздухе.

4. Однородный стержень длиной l сгибают под прямым углом в точке, делящей стержень в отношении 2:1. Стержень повешен на горизонтально расположенную ось (см. рисунок). Найти угол α между длинной стороной прямого угла и вертикалью.



5. Найти сопротивление данной электрической цепи. Значения сопротивлений элементов цепи приведены на рисунке.



Ответы и решения

1. Поскольку пар был насыщенным, при изотермическом сжатии он будет оставаться насыщенным, а часть пара будет конденсироваться. Поэтому давление газа в сосуде будет складываться из неизменного давления насыщенных паров и воздуха, для которого можно использовать закон Клапейрона-Менделеева

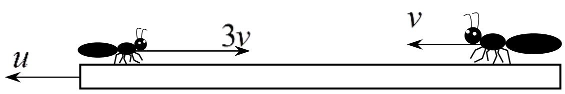
$$p_1 = p_{возд} + p_{пара} = \frac{\nu RT}{V_1} + p_{пара}$$

$$p_2 = p'_{возд} + p_{пара} = \frac{\nu RT}{V_2} + p_{пара}$$

Умножая первое уравнение на V_1, второе на V_2 и вычитая второе из первого, получим

$$p_{пара} = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{V_1 - V_2}$$

2. По закону сохранения импульса и закону сложения скоростей найдем скорость соломинки в процессе движения жуков. Поскольку меньший жук имеет существенно бо́ль-



шую скорость, соломинка будет двигаться в направлении движения большего жука. Пусть скорость соломинки u. Тогда поскольку скорости жуков относительно соломинки равны v и $3v$, скорости жуков относительно земли есть $3v-u$ и $v+u$. Поэтому по закону сохранения импульса имеем

$$m(3v-u)=2m(v+u)+Mu$$

Отсюда находим

$$u=\frac{mv}{M+3m}$$

Время встречи жуков t проще всего найти в системе отсчета, связанной с соломинкой. Поскольку в этой системе соломинка покоится, а скорости жуков равны $3v$ и v, находим

$$t=\frac{L}{v+3v}=\frac{L}{4v}$$

Отсюда находим перемещение соломинки

$$\Delta L=ut=\frac{mv}{M+3m}\cdot\frac{L}{4v}=\frac{mL}{4(M+3m)}$$

3. За время звучания сигнала автомобили успевает переместится. Поэтому звук, отвечающий началу сигнала, и звук, отвечающий концу сигнала, проходят до датчиков разные расстояния. Если бы скорость звука была бесконечно большая, то звук приходил бы к датчикам в момент в тот же самый момент, когда он испускается автомобилем, и потому длительность испущенного и принятого сигналов была бы одинакова. Но скорость звука конечна, поэтому эти длительности разные.

Пусть длительность звукового сигнала, изданного автомобилем в системе отсчета, связанной с автомобилем, равна Δt. И пусть автомобиль, который движется со скоростью v в направлении детектора, начал издавать сигнал, когда он находился на расстоянии l от него. Тогда начало сигнала придет к детектору через время $t_1=l/c$ после начала излучения сигнала автомобилем, конец – через время $t_2=\Delta t+(l-v\Delta t)/c$ после начала излучения сигнала автомобилем, поэтому длительность сигнала, принятого детектором, расположенным по ходу движения автомобиля, будет равна

$$T=t_2-t_1=\Delta t-\frac{v\Delta t}{c}$$

Аналогично, длительность сигнала, принятого детектором, расположенным сзади автомобиля, будет равна

$$1{,}1T=\Delta t+\frac{v\Delta t}{c}$$

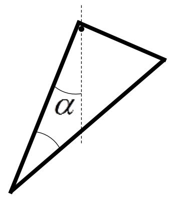
Деля второе уравнение на первое, получим

$$\frac{1{,}1}{1} = \frac{1 + v/c}{1 - v/c}$$

Отсюда

$$c = 21v$$

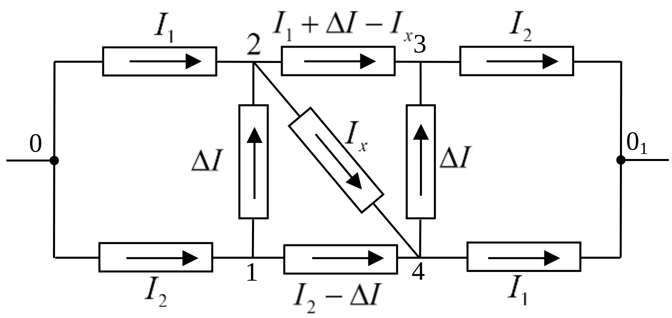
4. Стержень будет висеть так, что его центр тяжести окажется точно под точкой подвеса. Очевидно, центр тяжести изогнутого стержня будет лежать на медиане, треугольника, который можно получить из стержня, замыкая его концы (см. рисунок). То есть вертикаль будет совпадать с медианой треугольника, образованного стержнем, причем проведенной из вершины прямого угла.



А поскольку медиана прямоугольного треугольника равна половине гипотенузы, треугольник ACM равнобедренный (см. рисунок), и, следовательно, угол между стержнем и вертикалью равен углу треугольника, лежащему напротив короткого катета (оба этих угла отмечены на рисунке одной дугой). Поэтому

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) = \operatorname{arcctg}(2) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

5. Очевидно, что цепь обладает значительной симметрией – при изменении направлений всех токов мы, с одной стороны, должны получить ту же цепь, с другой, поменять местами верх и низ цепи. Это позволяет приписать токи каждому участку цепи так, как это показано на рисунке (пусть ток в цепи течет слева направо). Направление токов ΔI и I_x выбрано условно – если в результате расчетов окажется, что эти токи отрицательны, то их направление противоположно. При определении токов использовались правила токов в вершинах 1 и 2 (сумма втекающих токов равна сумме вытекающих). Используя теперь правило токов в вершине 3, получим очевидное соотношение



$$I_1 + 2\Delta I - I_x = I_2 \qquad (*)$$

Используем теперь правило напряжений для замкнутых контуров 0-2-1-0 и 2-4-1-2 (сумма напряжений на всех элементах этих контуров должна равняться нулю; напряжение считается положительным, если обход идет по току, и отрицательным в противном случае). С учетом (*) получим

$$\begin{aligned} &I_1 r - \Delta I 2r - I_2 r = 0 \\ &(I_1 + 2\Delta I - I_2)r - (I_2 - \Delta I)r + \Delta I 2r = 0 \end{aligned} \qquad (**)$$

или

$$\begin{aligned} &I_1 - 2\Delta I = I_2 \\ &I_1 + 5\Delta I = 2I_2 \end{aligned} \qquad (***)$$

Вычитая первое уравнение из второго, получим

$$\Delta I = \frac{1}{7} I_2, \qquad I_1 = \frac{9}{7} I_2 \qquad (4^*)$$

Пусть в цепи течет ток I. Поскольку в узле 0 он делится на I_1 и I_2 в пропорции (4*), находим

$$I_1 = \frac{9}{16} I, \qquad I_2 = \frac{7}{16} I, \qquad \Delta I = \frac{1}{16} I$$

Теперь легко найти падение напряжение на цепи (используя, например, нижний ее участок 0-1-4-0_1)

$$U = I_2 r + (I_2 - \Delta I) r + I_1 r = \frac{7Ir}{16} + \frac{6Ir}{16} + \frac{9Ir}{16} = \frac{11}{8} Ir$$

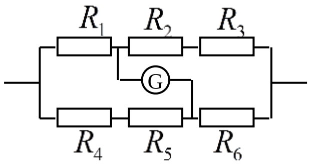
Отсюда находим общее сопротивление цепи

$$R = \frac{11r}{8}$$

2.16. Отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 4

Задания

1. В цепи, схема которой представлена на рисунке, ток через гальванометр не течет. Найти сопротивление R_2, если остальные сопротивления равны: $R_1 = 5$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 4$ Ом, $R_5 = 5$ Ом, $R_6 = 6$ Ом.

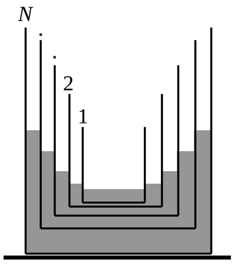


2. Две лодки с массами m и $2m$, связанные легким канатом, находятся на расстоянии L друг от друга. В некоторый момент времени матросы на одной из лодок начинают тянуть канат так, что эта лодка начинает двигаться с постоянным ускорением a. Через какое время лодки встретятся?

3. Граната, брошенная вертикально вверх с начальной скоростью v_0 в верхней точке своей траектории разорвалась на множество осколков, разлетающихся с одинаковыми скоростями. По какой площади, окажутся разбросанными на земле осколки, если они падали на землю в течение времени Δt?

4. С одним молем идеального одноатомного газа происходит процесс, в котором объем газа зависит от температуры по закону $V = \alpha\sqrt{T}$ (где α - некоторая постоянная). Какое количество теплоты нужно сообщить газу для двукратного увеличения его объема. Начальная температура газа T.

5. N цилиндрических стаканов с массами m, $2m$, ..., Nm и площадями сечений S, $2S$, ..., NS вставлены друг в друга. В стаканы наливают большое количество жидкости так, что каждый стакан плавает в большем стакане, не касаясь его дна и стенок. Самый большой стакан стоит на столе. Найти высоту уровня жидкости в самом большом стакане относительно стола. Полная масса жидкости M, плотность жидкости ρ. Стенки стаканов очень тонкие.



Ответы и решения

1. В мостовой схеме ток через амперметр не течет, если произведения сопротивлений, лежащих крест-накрест от моста, одинаковы. Для данной в условии цепи это условие дает

$$R_2 = \frac{R_1 R_6}{R_4 + R_5} - R_3 = 0,33 \text{ Ом}$$

2. Поскольку ускорение лодки равно a, то согласно третьему закону Ньютона ускорение второй равно $a/2$ и направлено навстречу первой. Поэтому лодки пройдут до встречи пути

$$l_1 = \frac{at^2}{2} \qquad \text{и} \qquad l_1 = \frac{at^2}{4}$$

сумма которых равна первоначальному расстоянию между лодками. Отсюда

$$t = \sqrt{\frac{4L}{3a}}$$

3. Используя известную формулу для высоты подъема тела, брошенного вертикально вверх, заключаем, что взрыв гранаты происходит на высоте

$$h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Рассмотрим теперь падение осколков. Очевидно, первым на землю упадет осколок, движущийся после взрыва вертикально вниз, последним – вертикально вверх. А поскольку осколки после взрыва имеют одинаковый скорости, то осколок, движущийся вверх, после того как снова возвратиться в точку взрыва гранаты, полностью повторит движение осколка, движущегося вниз. Поэтому время, в течение которого осколки падали на землю, равно времени подъема и спуска до точки взрыва осколка, движущегося после взрыва вертикально вверх. Отсюда находим скорость осколков сразу после взрыва гранаты

$$v_1 = \frac{g\Delta t}{2}$$

Наиболее далеко от точки взрыва гранаты (по горизонтали) улетят осколки, скорость которых после взрыва гранаты направлена под углом $45°$. А поскольку дальность полета тела, брошенного с высоты h со скоростью v_1 под углом $45°$, равна

$$L = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{v_1\sqrt{v_1^2 + 4gh}}{2g},$$

то для расстояния, которое пролетят осколки, имеем

$$L = \frac{g\Delta t^2 + \Delta t\sqrt{g^2\Delta t^2 + 16gh}}{8}$$

Отсюда находим площадь круга, по которому окажутся разбросанными осколки

$$S = \pi L^2$$

где L определяется предыдущей формулой.

4. Из закона Клапейрона-Менделеева имеем

$$pV = \nu RT = \frac{\nu RV^2}{\alpha^2} \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{\nu R}{\alpha^2}V$$

Таким образом, зависимость давления газа от его объема линейная. Применяем далее к рассматриваемому процессу первый закон термодинамики

$$Q = \Delta U + A \tag{*}$$

где ΔU - изменение внутренней энергии газа, A - его работа. Для изменения внутренней энергии газа получим из закона Клапейрона-Менделеева и данной в условии зависимости объема газа от его температуры

$$\Delta U = \frac{3}{2}R\Delta T = \frac{3}{2}\left(p_к V_к - p_н V_н\right) = \frac{3}{2}\left(\beta V_к^2 - \beta V_н^2\right) = \frac{3}{2}\left(4\beta V_н^2 - \beta V_н^2\right) = \frac{9}{2}\beta V_н^2 = \frac{9}{2}RT$$

($\beta = \nu R/\alpha^2 = const$). Работу газа найдем как площадь под графиком давления от объема

$$A = \frac{(p_к + p_н)(V_к - V_н)}{2} = \frac{1}{2}\left(\beta V_к^2 - \beta V_н^2\right) = \frac{1}{2}\left(4\beta V_н^2 - \beta V_н^2\right) = \frac{3}{2}\beta V_н^2 = \frac{3}{2}RT$$

В результате получаем

$$Q = 6RT$$

5. Рассмотрим равновесие n-го стакана. По закону Архимеда имеем

$$nmg = \rho g \Delta h_n nS$$

где Δh_n - разность уровней воды в n-ом и $n+1$-ом стаканах. Отсюда

$$\Delta h_n = \frac{mg}{\rho g S}$$

и не зависит от n. Таким образом, разность уровней воды во всех соседних стаканах одинакова. Найдем теперь высоту уровня воды в самом большом стакане. Пусть эта высота равна h. Тогда суммарный объем воды в стаканах можно найти как

$$V = hnS - \Delta h(n-1)S - \Delta h(n-2)S - ... - \Delta hS = hnS - \Delta hS\frac{(n-1)n}{2} = hnS - \frac{m(n-1)n}{2\rho}$$

А поскольку суммарная масса воды в стаканах есть $M = \rho V$, то из последней формулы получаем

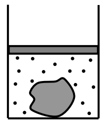
$$h = \frac{M}{n\rho S} + \frac{m(n-1)}{2\rho S}$$

2.17. Олимпиада имени И.В.Курчатова (отборочный тур олимпиады «Росатом»), 11 класс

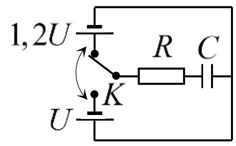
1. Из города А в город В, расстояние между которыми S машина ехала с постоянной скоростью v, из В в А – со скоростью $1,2v$. Найти величину и направление среднего ускорения машины за все время движения.

2. Тело падает на землю. Известно, что некоторый промежуточный участок пути длиной h тело проходит за время t. Найти скорость тела в тот момент, когда оно пройдет одну пятую часть этого участка пути.

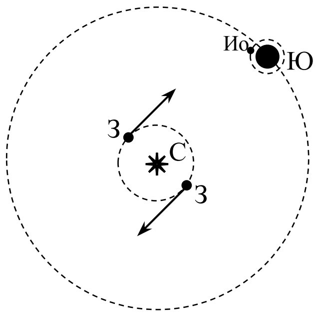
3. В вертикальном цилиндрическом сосуде под незакрепленным поршнем находится идеальный газ и тело неизвестного объема. Температура газа под поршнем T, высота поршня над дном сосуда - h, площадь сечения сосуда S. Когда газ нагрели до температуры $1,2T$, поршень поднялся до высоты $1,1h$. Найти объем тела. Изменением его объема пренебречь.



4. Два источника электрического напряжения U и $1,2U$, резистор R, конденсатор C и ключ K соединили так, как показано на рисунке. Ключ переключают с очень большой скоростью. Найти мощность, которая выделяется в резисторе после того, как заряд конденсатора практически перестанет меняться.



5. (Олаф Рёмер, 1676 г.) Спутник Юпитера Ио совершает один оборот вокруг Юпитера за 42,5 часа. Однако, когда Земля движется по своей орбите в сторону Юпитера, наблюдаемый с Земли период обращения Ио уменьшается в среднем на 9,6 секунды, когда Земля движется от Юпитера – на ту же величину увеличивается. Объясните этот эффект и оцените по приведенным данным скорость света. Расстояние от Земли до Солнца – 150 млн км, расстояние от Юпитера до Солнца – 800 млн км. Период обращения Юпитера вокруг Солнца – 12 лет, радиус Земли – 6400 км, радиус Юпитера – 70000 км (некоторые из этих данных могут оказаться лишними).



Ответы и решения

1. По определению ускорения имеем

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t}$$

где v_2 - конечная скорость (при движении из города В в город А, вектор направлен из В в А, величина - $v_2 = 1,2v$), v_1 - начальная скорость (при движении из города А в город В, вектор направлен из А в В, величина - $v_1 = v$),

$$t = \frac{S}{1,2v} + \frac{S}{v} = \frac{2,2S}{1,2v}$$

Полное время движения между городами А и В и обратно. Поскольку вектор $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ направлен из В в А и его модуль равен $2,2v$, получаем

$$a_{cp} = \frac{1,2v^2}{S},$$

Вектор направлен из города В в город А.

2. Пусть в начале этого участка пути тело имеет скорость v_0. Тогда для времени его прохождения имеем

$$h = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$$

Откуда находим

$$v_0 = \frac{h}{t} - \frac{gt}{2}$$

Теперь по закону сохранения энергии находим скорость тела в конце одной пятой части этого участка пути

$$v = \sqrt{\frac{h^2}{t^2} - \frac{3}{5}gh + \frac{g^2t^2}{4}}$$

3. Пусть объем тела V. Тогда закон Клапейрона-Менделеева для начального и конечного состояний газа дает

$$p(hS - V) = \nu RT$$
$$p(1,1hS - V) = 1,2\nu RT$$

где p - давление газа (одинаковое и в начале и в конце процесса, поскольку поршень не закреплен), ν - количество вещества газа. Деля уравнения друг на друга, получим

$$\frac{hS - V}{1,1hS - V} = \frac{1}{1,2}$$

Откуда

$$V = \frac{hS}{2}$$

4. За много периодов переключения ключа конденсатор зарядится до такого заряда, что при одном положении ключа он будет разряжаться на какую-то величину, при другом – заряжаться на ту же величину (в противном случае возникнет «тренд» изменения заряда и заряд за много переключений изменится). Это значит, что когда ключ замкнут на очень короткое время «вверх», и когда ключ замкнут на очень короткое время вниз, ток через сопротивление должен быть направлен по разному, но быть одинаковым по величине. А поскольку омическое сопротивление есть только у резистора, то ток через него можно найти по закону Ома для участка цепи, считая что все падение напряжения в цепи происходит на резисторе. Поэтому если напряжение на конденсаторе равно U_0, то токи через резистор при двух положениях ключа могут быть найдены по формулам

Ключ замкнут «вверх» $I = \frac{1,2U - U_0}{R}$.

Ключ замкнут «вниз» $I = \frac{U_0 - U}{R}$.

Отсюда находим, что $U_0 = 1,1U$, а ток через резистор в течение короткого времени, пока конденсатор не успел разрядиться, равен

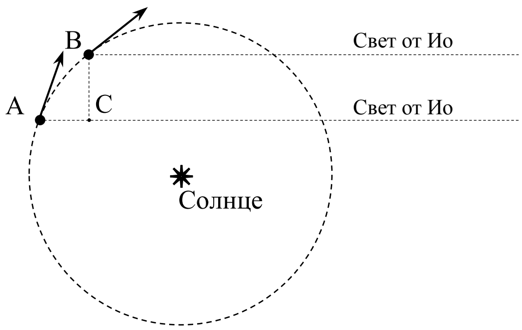
$$I = \frac{0,1U}{R}$$

Поэтому

$$P = I^2 R = \frac{0,01U^2}{R}$$

5. Рассматриваемый эффект, который устойчиво наблюдался с середины 17 века, связан с движением Земли и конечностью скорости света. При движении Земли в направлении Юпитера (движением Юпитера можно пренебречь, поскольку когда Земля делает пол-оборота, Юпитер – одну двадцать четвертую) для земного наблюдателя интервал времени между двумя затмениями уменьшается, поскольку Земля за интервал времени между затмениями приблизилась к Юпитеру и «свет от следующего затмения» придет к Земле раньше, чем от предыдущего.

Оценим скорость света по приведенным данным. Рассмотрим движение Земли по своей орбите в направлении Юпитера. Пусть, когда Земля находилась в точке А (см. рисунок), земной наблюдатель увидел начало затмения Ио. Если бы Земля стояла на месте, то свет от следующего затмения Ио пришел бы ровно через 42,5 часа (настоящий интервал времени между затмениями). Но если к этому времени Земля переместилась в точку В, то свет придет раньше настолько, сколько ему требуется, чтобы пройти отрезок АС (проекцию расстояния, пройденного Землей между затмениями, на направление от Земли к Ио). Поэтому сумма уменьшений интервалов времени между затмениями за половину земного года (а за это время пройдет около 100 затмений Ио) будет равна тому времени, какое требуется свету для прохождения диаметра земной орбиты. Отсюда находим



$$c = \frac{2 \cdot 150 \cdot 10^6 (км)}{18 (мин)} = \frac{300 \cdot 10^6 (км)}{1080 (сек)} = 278000 (км/сек)$$

Мы получили несколько меньшее значение скорости света, чем настоящее 300000 км/сек. Главная ошибка нашей оценки связана с пренебрежением движением Юпитера. Его учет позволяет улучшить оценку Ремера (оценка самого Ремера составляла 220000 км/сек; его ошибка возникла из-за большой неточности, с которой в его время было известно расстояние от Земли до Солнца).