

## 2.5. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 10 класс, комплект 1

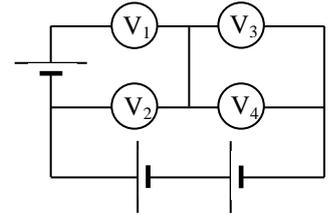
### Задания

1. Между городами  $A$  и  $B$  есть три деревни  $P$ ,  $Q$  и  $R$ , причем для расстояний между населенными пунктами справедливы такие соотношения:  $AP : PQ : QR : RB = 1 : 2 : 3 : 4$ . Автомобиль проехал между городами  $A$  и  $B$  так, что его скорость между каждыми ближайшими населенными пунктами была постоянной, а времена прохождения отрезков  $AP$ ,  $PQ$ ,  $QR$  и  $RB$  относятся друг к другу как  $4 : 3 : 2 : 1$ . Найти среднюю скорость автомобиля на первой половине пути, если его скорость на отрезке  $RB$  равнялась  $v$ .



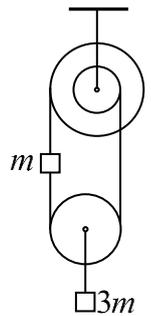
2. Тело падает с некоторой высоты без начальной скорости. В некоторый момент времени оно оказалось на высоте  $h$  над землей, а спустя интервал времени  $\Delta t$  на высоте  $h/4$ . С какой высоты падало тело?

3. Имеется три одинаковых идеальных (с нулевым внутренним сопротивлением) источника напряжения  $U$  и четыре одинаковых вольтметра. Приборы соединили в цепь проводами, сопротивлением которых можно пренебречь, так, как это показано на рисунке. Найти показания всех вольтметров.



4. В сосуд с некоторым количеством жидкости опустили работающий нагреватель мощности  $P = 1000$  Вт. При этом температура жидкости повысилась на  $\Delta T = 1^\circ \text{C}$  за время  $t_1 = 10$  с. Когда в этот же сосуд опустили работающий нагреватель мощности  $P/2$ , то температура жидкости повысилась на  $\Delta T$  за время  $t_2 = 24$  с. За какое время температура жидкости в сосуде повысится на ту же величину  $\Delta T$ , если в сосуд опустить работающий нагреватель мощности  $2P$ ?

5. Блок склеен из двух дисков с радиусами  $R$  и  $2R$ , насаженных на одну и ту же горизонтальную ось, и подвешен к горизонтальному потолку. На блоки намотана невесомая нерастяжимая нить, к которой прикреплен груз массой  $m$ , как это показано на рисунке. Нить охватывает также нижний блок, размеры которого подобраны так, что все отрезки нити вертикальны. Второй груз массой  $3m$  прикреплен к оси нижнего блока. Найти ускорение тел. Блоки невесомы.



### Ответы и решения

1. Пусть  $AP = l$ . Тогда  $PQ = 2l$ ,  $QR = 3l$ ,  $RB = 4l$ . Пусть время, затраченное на прохождение отрезка  $RB$ , равно  $t$ . Тогда, во-первых, времена, затраченные на прохождение остальных участков пути, равны: на  $QR$  -  $2t$ , на  $PQ$  -  $3t$ , на  $AP$  -  $4t$ , а во-вторых,

$$v = \frac{4l}{t}$$

Средняя скорость машины на первой половине пути равна отношению длины половины пути ( $5l$ ) ко времени, затраченному на ее прохождение. Первая половина пути состоит из участка  $AP$ , участка  $PQ$  и двух третей участка  $QR$ . Поэтому на прохождение первой половины пути автомобиль затратит следующее время

$$t_0 = 4t + 3t + \frac{2}{3}2t = \frac{25}{3}t$$

Отсюда получаем для средней скорости автомобиля на первой половине пути

$$v_{cp} = \frac{5l}{(25/3)t} = \frac{3l}{5t} = \frac{3}{20}v.$$

2. Основная идея решения задачи заключается в том, что, рассматривая движение тела от точки на высоте  $h$  до точки на высоте  $h/4$ , можно найти его скорость на высоте  $h$ , а потом, например, на основе закона сохранения энергии – высоту начальной точки над землей.

Законы равноускоренного движения для движения от точки на высоте  $h$  до точки на высоте  $h/4$  дают

$$\frac{3h}{4} = v_0 \Delta t + \frac{g \Delta t^2}{2}$$

Отсюда находим

$$v_0 = \frac{3h}{4\Delta t} - \frac{g\Delta t}{2}$$

Теперь по закону сохранения механической энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgl$$

Находим высоту  $l$  начальной точки над точкой, находящейся на высоте  $h$  над землей

$$l = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{\left(\frac{3h}{4\Delta t} - \frac{g\Delta t}{2}\right)^2}{2g}$$

А затем и искомую высоту  $H$  начальной точки над землей

$$H = h + l = h + \frac{\left(\frac{3h}{4\Delta t} - \frac{g\Delta t}{2}\right)^2}{2g}$$

**3.** Очевидно, показания третьего и четвертого вольтметра равны

$$U_3 = U_4$$

Поскольку сумма напряжений на элементах любого замкнутого контура равна нулю, то для показаний второго и четвертого вольтметра имеем

$$U_2 + U_4 = 2U$$

Для первого и третьего

$$U_1 + U_3 = 3U$$

С другой стороны, вольтметры одинаковы, следовательно, напряжения на них пропорциональны токам через них. Но сумма токов, текущих через первый и второй вольтметр, равна сумме токов, текущих через третий и четвертый. Поэтому

$$U_3 + U_4 = U_1 + U_2$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$U_1 = \frac{7U}{4}, U_2 = \frac{3U}{4}, U_3 = U_4 = \frac{5U}{4}$$

**4.** Очевидно, что в задаче нужно учитывать потери. Действительно, если бы потерь не было, то при двукратном уменьшении мощности нагревателя время нагрева жидкости на ту же величину  $\Delta T$  возросло бы вдвое. А оно по условию больше. Поэтому уравнение теплового баланса для первого случая дает

$$cm\Delta T = Pt_1 - wt_1$$

где  $w$  - мощность теплопотерь. Для второго нагревателя (мощность теплопотерь такая же, поскольку разность температур жидкости и окружающей среды изменилась мало) имеем

$$cm\Delta T = \frac{P}{2}t_2 - wt_2$$

Решая эту систему уравнений, получим для мощности теплопотерь (поскольку дальнейшие вычисления проще сделать «в числах», сразу вычислим значение мощности теплопотерь)

$$w = \frac{P(t_2 - 2t_1)}{2(t_2 - t_1)} = 143 \text{ Вт}$$

Для третьего случая уравнение теплового баланса с учетом потерь дает

$$cm\Delta T = 2Pt_3 - wt_3$$

Отсюда

$$Pt_1 - wt_1 = 2Pt_3 - wt_3 \quad \Rightarrow \quad t_3 = \frac{(P-w)}{(2P-w)} t_1 = 4,6 \text{ сек.}$$

5. Очевидно, векторы ускорений обоих тел направлены вниз. Действительно, при движении тела  $m$  вниз, с верхнего блока сматывается больше нити, чем на него наматывается, следовательно, нижний блок (и нижнее тело) опускается.

Второй закон Ньютона для обоих тел дает

$$m\vec{a}_1 = m\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2$$

$$3m\vec{a}_2 = 3m\vec{g} + \vec{T}$$

где  $a_1$  и  $a_2$  - ускорения тел с массами  $m$  и  $3m$  соответственно (остальные обозначения очевидны из рисунка). Или в проекциях на ось  $x$ , направленную вертикально вниз

$$ma_1 = mg + T_2 - T_1 \quad (*)$$

$$3ma_2 = 3mg - T$$

Установим условия связи между неизвестными. Поскольку нижний блок не имеет массы, а на него действуют две силы  $\vec{T}_2$ , направленные вверх, и сила  $\vec{T}$ , направленная вниз, то  $T = 2T_2$ . Верхний блок вращают силы  $T_2$  с плечом  $R/2$  и сила  $T_1$  с плечом  $R$ . А поскольку он также не имеет массы, то его можно вращать практически нулевым моментом. Поэтому

$$T_1 R = T_2 R / 2 \quad \Rightarrow \quad T_2 = 2T_1$$

В результате система уравнений (\*) принимает вид

$$ma_1 = mg + T_1$$

$$3ma_2 = 3mg - 4T_1 \quad (**)$$

Найдем связь ускорений. Пусть тело  $m$  спустилось на величину  $\Delta l$ . Значит, с большого блока смоталась нить длиной  $\Delta l$ , на малый - наматывается  $\Delta l/2$ . Нить станет длиннее на  $\Delta l/2$ , нижний блок опустится на  $\Delta l/4$ . Следовательно, если ускорение тела  $m$  равно  $a$ , то ускорение тела  $3m$  равно  $a/4$ . Поэтому

$$a_1 = 4a_2$$

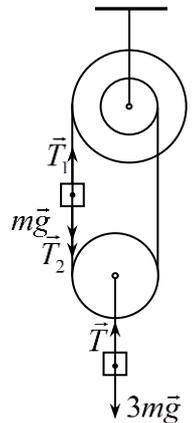
В результате система уравнений (\*\*) примет вид

$$4ma_2 = mg + T_1$$

$$3ma_2 = 3mg - 4T_1 \quad (**)$$

Решая систему, найдем

$$a_1 = \frac{28g}{19}, \quad a_2 = \frac{7g}{19}$$



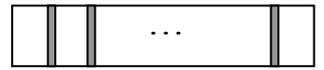
## 2.6. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 10 класс, комплект 2

### Задания

1. В электрической цепи, схема которой представлена на рисунке, три одинаковых резистора соединены последовательно и подключены к батарее с ЭДС  $\varepsilon = 6$  В. Два одинаковых вольтметра, подключенных так, как показано на рисунке, показывают напряжение  $U = 3$  В. Что будет показывать один из них, если второй вообще отключить от цепи? Внутреннее сопротивление источника равно нулю.

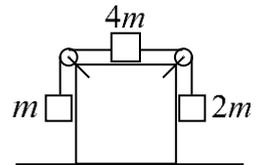
2. Слононок и Мартышка измеряют длину Удава, который проползал мимо них. В тот момент, когда около них был хвост Удава, Мартышка побежала к его голове и, добежав, положила на землю в ту точку, где находилась голова Удава, банан. Затем она побежала обратно и положила второй банан рядом с кончиком хвоста Удава (который продолжал ползти). Потом пришел Попугай и измерил расстояния от Слононка (который все время стоял на месте) до бананов в «попугаях». Эти расстояния оказались равны - 48 попугаев и 16 попугаев. Найти отношение скорости Мартышки к скорости Удава и длину Удава в попугаях.

3. В горизонтальном цилиндрическом сосуде длиной  $l$  находятся  $n$  подвижных теплопроницаемых поршней, делящих сосуд на  $n+1$  отсек. Первоначально температура газа во всех отсеках была равна  $T_0$ , объемы

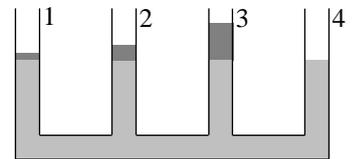


всех отсеков одинаковы. Затем газ в самом левом отсеке нагревают до температуры  $T_1$ , а температуру газа в других отсеках поддерживают равной  $T_0$ . На сколько сместится при этом самый правый поршень?

4. На горизонтальной опоре находится куб, на котором укреплены два блока. Через блоки перекинута нить с грузами массами  $m$ ,  $4m$  и  $2m$ . Какой горизонтальной силой надо действовать на куб, чтобы он покоился? Трение между кубом и опорой отсутствует; коэффициент трения между верхним телом и кубом -  $k$ .



5. Имеются четыре одинаковых цилиндрических сосуда, в которое налито некоторое количество воды. Поверх воды в первый, второй и третий сосуды (сосуды перенумерованы на рисунке) аккуратно наливают слой масла толщиной соответственно  $h$ ,  $2h$  и  $3h$ . Насколько изменится уровень жидкости в каждом сосуде по сравнению с первоначальным положением после установления равновесия? Известно, что при налипании масла вода ни из одного сосуда полностью маслом не вытесняется. Плотность масла  $\rho_0$ , воды  $\rho_1$  ( $\rho_1 > \rho_0$ ).

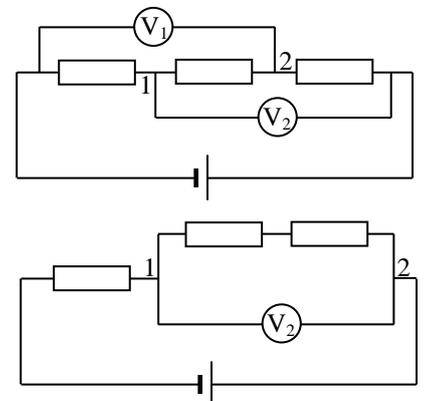


### Ответы и решения

1. Очевидно, вольтметры неидеальные, поскольку в случае идеальности они должны были бы показывать  $2/3$  от напряжения источника, а они показывают половину. Кроме того, из данных условия очевидно, что ток через центральное сопротивление не течет. Действительно, поскольку вольтметры  $V_1$  и  $V_2$  показывают половину напряжения источника, то потенциалы точек 2 и 3 одинаковы. Поэтому ток через центральное сопротивление не течет, его можно выбросить, а падения напряжения на резисторах и вольтметрах одинаковы. Поэтому сопротивление вольтметра равно сопротивлению резисторов.

При выбрасывании одного вольтметра цепь принимает следующий вид (см. рисунок), причем сопротивление участка 1-2 равно  $\frac{2R}{3}$ , поскольку сопротивление вольтметра равно сопротивлению ре-

зисторов. Поэтому напряжение на участке 1-2 составляет  $2/5$  от напряжения источника и, следовательно,



$$V_2 = \frac{2}{5} \varepsilon = 2,4 \text{ В}$$

2. Очевидно, мартышка пробежала до головы удава расстояние  $lv_m / (v_m - v_y)$ , которое по условию равно 48 попугаям (здесь  $l$  - длина Удава,  $v_m$  - скорость Мартышки,  $v_y$  - скорость Удава). Поэтому

$$\frac{lv_m}{v_m - v_y} = 48 \text{ П} \quad (*)$$

Когда Мартышка побежала обратно, она пробежала расстояние (от точки разворота)  $lv_m / (v_m + v_y)$ , которое по условию равно 32 П (48 П - 16 П). Поэтому

$$\frac{lv_m}{v_m + v_y} = 32 \text{ П} \quad (**)$$

Решая систему уравнений (\*)-(\*\*), найдем

$$\frac{v_m}{v_y} = 5, \quad l = 38,4 \text{ П}$$

3. Из условия равновесия поршней до нагревания заключаем, что количество вещества газа в каждом отсеке одинаково. После нагревания газа в левом отсеке его давление увеличится, что приведет к перемещению всех поршней вправо. При этом поскольку температуры газов во всех отсеках, кроме крайнего левого, одинаковы, то из условия равновесия поршней следует, что объемы этих отсеков должны быть одинаковы. Это значит, что если правый поршень сместился вправо на  $\Delta x$ , то второй справа - на  $2\Delta x$ , третий - на  $3\Delta x$ , ..., самый левый - на  $n\Delta x$ .

Отсюда находим, что объем каждого отсека за исключением самого левого уменьшился на  $S\Delta x$ , объем левого отсека увеличился на  $nS\Delta x$ , где  $S$  - площадь сечения сосуда. Поэтому условие равновесия самого левого поршня имеет вид

$$\frac{\nu RT_1}{\left(\frac{l}{n+1} + n\Delta x\right)S} = \frac{\nu RT_0}{\left(\frac{l}{n+1} - \Delta x\right)S}$$

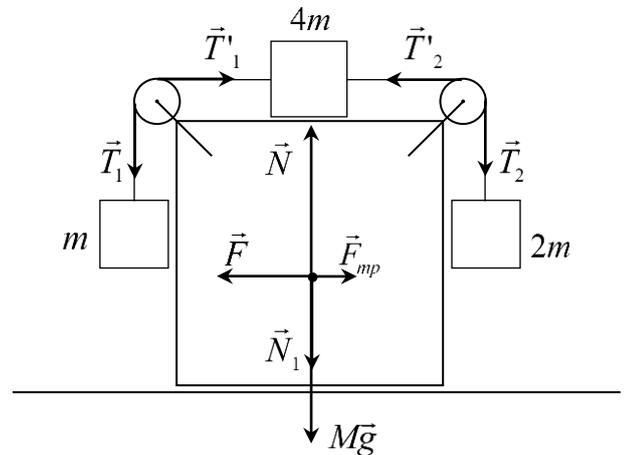
где  $\nu$  - число молей газа в каждом отсеке. Решая уравнение (1), находим перемещение самого правого поршня

$$\Delta x = \frac{l(T_1 - T_0)}{(n+1)(nT_0 + T_1)}$$

4. Чтобы куб покоился, сумма сил, действующих на него, должна равняться нулю. На куб действуют: сила тяжести  $M\vec{g}$  ( $M$  - масса куба), верхнее тело с силой  $\vec{N}_1$ , сила реакции опоры  $\vec{N}$ , сила трения со стороны верхнего тела (направленная вправо, т.к. верхнее тело движется вправо), внешняя горизонтальная сила  $\vec{F}$ , удерживающая куб в покое (направленная, очевидно, влево), и нити, переброшенные через блоки. Нити действуют на куб через блоки, причем каждая нить оказывает воздействие в горизонтальном ( $\vec{T}'_1$  и  $\vec{T}'_2$ ) и вертикальном ( $\vec{T}_1$  и  $\vec{T}_2$ ) направлениях (см. рисунок). Поэтому условие равновесия куба дает

$$F = T_2 - T_1 - F_{mp} \quad (1)$$

где  $T_1$  и  $T_2$  - силы натяжения левой (связанной с меньшим грузом) и правой нитей соответственно,  $F_{mp}$  - сила трения. Таким образом, чтобы найти силу  $F$ , надо найти силы натяжения нитей и силу трения.



Поэтому рассмотрим задачу динамики для трех тел, скрепленных нитями, при нулевом ускорении куба. На меньшее тело действуют: сила тяжести и сила натяжения левой нити. На верхнее тело: сила тяжести, сила реакции куба, сила трения, силы натяжения левой и правой нитей. На большее тело: сила тяжести и сила натяжения правой нити. Поэтому второй закон Ньютона для всех тел в проекциях на направления движения каждого тела имеет вид

$$\begin{aligned} ma &= T_1 - mg \\ 4ma &= T_2 - T_1 - 4kmg \\ 2ma &= 2mg - T_2 \end{aligned} \quad (2)$$

(здесь использована одинаковость ускорений тел и одинаковость сил натяжения, действующих со стороны разных концов нитей). Решая систему уравнений (2), находим

$$a = \frac{g(1-4k)}{7}.$$

Теперь из формулы (1) и второго уравнения системы (2) находим силу  $\vec{F}$

$$F = 4ma = \frac{4mg(1-4k)}{7}$$

при  $k > 1/4$ , тела не будут двигаться по кубу, поэтому и куб будут стоять.  $F = 0$ . Таким образом

$$F = \frac{4mg(1-4k)}{7}, \text{ при } k < 0,25$$

$$F = 0, \text{ при } k > 0,25$$

**5.** С точки зрения давления в жидкости наливание в сосуд слоя масла толщиной  $h$  эквивалентно наливанию слоя воды толщиной

$$\frac{\rho_0 h}{\rho_1}.$$

Поэтому наливание в систему сосудов слоя масла толщиной  $6h$  (в первый, второй и третий сосуды) эквивалентно тому, что мы нальем слой воды толщиной

$$h_1 = \frac{6\rho_0 h}{\rho_1}$$

Но если бы мы налили такое количество воды, она распределилась бы равномерно по четырем сосудам. Учитывая, что в четвертом сосуде будет только вода (по условию масло полностью воду ни из одного сосуда не вытесняет и, следовательно, не может попасть в четвертый сосуд), то уровень воды в нем поднимется на величину

$$\Delta h_4 = \frac{6\rho_0 h}{4\rho_1} = \frac{3\rho_0 h}{2\rho_1}.$$

При этом давление в жидкости (около дна сосуда) возрастет на величину

$$\Delta p = \rho_1 g h_4 = \frac{3}{2} \rho_0 g h \quad (*)$$

Изменение уровня жидкости в первом, втором и правом сосудах найдем из условия увеличения давления в этих сосудах на эту величину.

В первом сосуде находится слой масла толщиной  $h$ , который обеспечивает дополнительное давление  $\rho_0 g h$ . Поэтому для увеличения давления на  $(3/2)\rho_0 g h$  в левый сосуд должна войти дополнительная вода, дающая давление около дна сосуда  $(1/2)\rho_0 g h$ , т.е. слой воды толщиной  $(1/2)(\rho_0 / \rho_1)h$ . Это значит, что уровень жидкости в первом сосуде увеличится на величину

$$\Delta h_1 = h + \frac{\rho_0}{2\rho_1} h = h \left( 1 + \frac{\rho_0}{2\rho_1} \right)$$

Во втором сосуде появится дополнительный слой масла толщиной  $2h$ , который обеспечивает дополнительное давление

$$2\rho_0 g h$$

Поэтому чтобы давление около дна второго сосуда возросло на величину  $\Delta p$  (\*) из второго сосуда должна уйти вода толщиной  $(1/2)(\rho_0/\rho_1)h$ . Поэтому уровень воды во втором сосуде поднимется на величину

$$\Delta h_2 = 2h - \frac{\rho_0}{2\rho_1}h = 2h\left(1 - \frac{\rho_0}{4\rho_1}\right)$$

В третьем сосуде появится дополнительный слой масла толщиной  $3h$ , который обеспечивает дополнительное давление

$$3\rho_0gh$$

Поэтому чтобы давление около дна третьего сосуда возросло на величину  $\Delta p$  (\*) из третьего сосуда должна уйти вода толщиной  $(3/2)(\rho_0/\rho_1)h$ . Поэтому уровень воды в третьем сосуде поднимется на величину

$$\Delta h_3 = 3h - \frac{3\rho_0}{2\rho_1}h = 3h\left(1 - \frac{\rho_0}{2\rho_1}\right)$$

(проверка: сумма подъемов уровней жидкости во всех сосудах должна дать то, что налили, т.е.  $4h$  .

$$\Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3 + \Delta h_4 = h + \frac{\rho_0}{2\rho_1}h + 2h - \frac{\rho_0}{2\rho_1}h + 3h - \frac{3\rho_0}{2\rho_1}h + \frac{3\rho_0}{2\rho_1}h = 6h$$

как и должно быть).