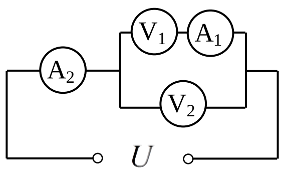
2.18. Олимпиада имени И.В.Савельева (отборочный тур олимпиады «Росатом»), 10 класс

Задания

1. До какой минимальной температуры нужно нагреть стальной кубик, чтобы при постановке его на лед с температурой $t_0 = 0°$ С он смог полностью погрузиться в лед. Плотность льда $\rho_0 = 900$ кг/м^3 , плотность стали $\rho = 7800$ кг/м^3, удельная теплоемкость стали $c = 4,6 \cdot 10^2$ Дж/(кг$\cdot$град), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,4 \cdot 10^5$ Дж/кг.

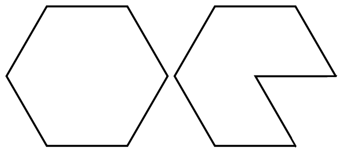
2. Два одинаковых амперметра А1 и А2 и два одинаковых вольтметра V1 и V2 включены в электрическую цепь так, как показано на рисунке. Показания приборов оказались следующими: амперметра А1: I_1, вольтметра V_1 - U_1, вольтметра V_2 - U_2. Найти ток через амперметр A_2 и сопротивления амперметров и вольтметров.



3. Со ступеньки высотой h под некоторым углом к горизонту бросают тело. Известно, что полное время движения тела равно t. Найти отношение времени подъема тела до верхней точки траектории ко времени спуска от верхней точки до поверхности земли.

4. Чтобы пробить закрепленную дощечку пуля должна иметь минимальную скорость v. Какую минимальную скорость должна иметь пуля, чтобы пробить эту же дощечку, подвешенную на длинной нити? Масса пули m, дощечки – $10m$.

5. Имеется однородный плоский правильный шестиугольник, длина ребра которого равна a. Из шестиугольника вырезан правильный треугольник так, как показано на рисунке. Насколько сместился при этом центр тяжести фигуры?



Ответы и решения

1. Чтобы куб мог полностью погрузиться в лед, нужно чтобы количество теплоты, выделившееся при его остывании от начальной температуры до температуры льда ($t_0 = 0°$ С) было достаточно, чтобы растопить лед, объем которого больше или равен объему куба. Минимальной начальной температуре льда t_x, достаточной для этого, отвечает ситуация, когда объем растаявшего льда равен объему куба. Поэтому для минимальной температуры куба получим

$$\lambda \rho_0 V = c \rho V \left(t_x - t_0 \right)$$

где V - объем куба. Отсюда получаем

$$t_x = t_0 + \frac{\lambda \rho_0}{c \rho} = 105°C$$

2. Так как вольтметры обладают одинаковым сопротивлением, то отношение напряжения на них равно отношению токов. Поэтому через вольтметр V_2 течет ток $I_1 U_2 / U_1$. Поэтому ток, текущий через амперметр А2 равен

$$I_2 = I_1 + \frac{I_1 U_2}{U_1} = I_1 \frac{U_1 + U_2}{U_1}$$

Сопротивление вольтметра найдем по закону Ома: ток через вольтметр V_1 равен I_1 (такой же как через амперметр А1), напряжение на нем - U_1. Поэтому

$$R_V = \frac{U_1}{I_1}.$$

Ток через амперметр А1 равен I_1, напряжение на нем $U_2 - U_1$. Поэтому

$$R_A = \frac{U_2 - U_1}{I_1}.$$

3. Пусть тело бросают с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Тогда время подъема тела до верхней точки и ее высота над ступенькой определяется соотношением

$$t_{под} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}, \quad H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

Время спуска тела от точки максимального подъема до поверхности земли равно времени падения тела с высоты $h + H$

$$t_{сп}^2 = \frac{2(H+h)}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} + \frac{2h}{g} = t_{под}^2 + \frac{2h}{g}.$$

Таким образом, время подъема и время спуска удовлетворяют следующим уравнениям

$$\begin{cases} t_{сп} + t_{под} = t \\ t_{сп}^2 - t_{под}^2 = \dfrac{2h}{g} \end{cases}$$

Решая систему уравнений, находим

$$t_{сп} = \frac{t}{2} + \frac{h}{gt}, \qquad t_{под} = \frac{t}{2} - \frac{h}{gt}$$

Отсюда

$$\frac{t_{под}}{t_{сп}} = \frac{gt^2 - 2h}{gt^2 + 2h}$$

4. Когда дощечка не закреплена, она после попадания пули будет, поэтому вся энергия пули затрачивается на совершение работы против сил сопротивления. Когда же дощечка может двигаться, часть энергии пули будет потрачена на то, чтобы заставить ее двигаться, и поэтому для пробивания дощечки начальная энергия пули должна быть больше. Найдем ее.

Пусть при пробивании пулей дощечки она должна совершить работу против сил сопротивления A. Поскольку при минимальной скорости пробивания дощечки поля вылетает практически с нулевой скоростью, то

$$\frac{mv^2}{2} = A \qquad (*)$$

Когда дощечка не закреплена, то для системы дощечка-пуля выполнены законы сохранения импульса и энергии, причем при минимальной скорости пробивания скорость пули при вылете из дощечки практически равна скорости дощечки, а работа против сил сопротивления такая же, как и в случае закрепленной дощечки (поскольку она определяется силами взаимодействия пули и дощечки, которые не зависят от того, двигается дощечка или нет). Поэтому

$$mv_1 = (m+M)u$$

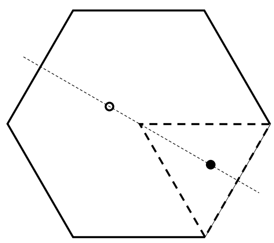
$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{(m+M)u^2}{2} = A$$

где v_1 минимальная скорость пули, необходимая для пробивания незакрепленной дощечки, u - скорость дощечки и пули в момент вылета пули из дощечки. Решая систему уравнений с учетом условия (*), получим

$$v_1 = \sqrt{\frac{m+M}{M}}v$$

В первом варианте $M = 10m$. Поэтому

$$v_1 = \sqrt{\frac{11}{10}}v$$



5. Рассмотрим «целый» шестиугольник. Его центр тяжести находится в центре (из симметрии). С другой стороны, этот центр тяжести можно найти как центр тяжести мысленно выделенного треугольника (показан на рисунке черным кружком) и части шестиугольника без треугольника (показан на рисунке прозрачным кружком). Но центр тяжести треугольника находится в точке пересечения медиан, т.е. на расстоянии $\frac{\sqrt{3}a}{3}$ (где a - длина стороны шестиугольника) от центра шестиугольника. Поэтому расстояние от центра шестиугольника до центра тяжести шестиугольника без треугольника x можно найти из соотношения

$$5mx = m\frac{\sqrt{3}}{3}a$$

Отсюда

$$x = \frac{\sqrt{3}a}{15}$$

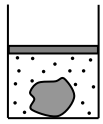
2.19. Олимпиада имени И.В.Курчатова (отборочный тур олимпиады «Росатом»), 10 класс

Задания

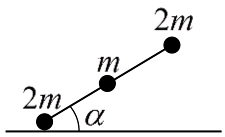
1. Из города А в город В, расстояние между которыми S машина ехала с постоянной скоростью v, из В в А – со скоростью $1,2v$. Найти величину и направление среднего ускорения машины за все время движения.

2. Тело падает на землю. Известно, что некоторый промежуточный участок пути длиной h тело проходит за время t. Найти скорость тела в тот момент, когда оно пройдет одну пятую часть этого участка пути.

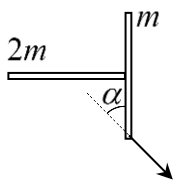
3. В вертикальном цилиндрическом сосуде под незакрепленным поршнем находится идеальный газ и тело неизвестного объема. Температура газа под поршнем T, высота поршня над дном сосуда - h, площадь сечения сосуда S. Когда газ нагрели до температуры $1,2T$, поршень поднялся до высоты $1,1h$. Найти объем тела. Изменением его объема пренебречь.



4. Три шарика с массами $2m$, m и $2m$ прикреплены на равных расстояниях l друг от друга на тонкой невесомой прямой палочке. В начальный момент систему удерживают так, что нижний шарик стоит на столе, палочка составляет угол α с поверхностью. Палочку отпускают. Найти скорости шариков перед самым падением палочки на поверхность. Трение отсутствует.



5. Две тонкие палочки одинаковой длины с массами m и $2m$ образуют букву «Т» (палочка с массой $2m$ прикреплена к середине палочки с массой m под прямым углом к ней). Палочки лежат на шероховатой горизонтальной поверхности (см. рисунок, вид сверху). К оному из концов палочки m привязана нить, за которую систему палочек медленно тянут по поверхности. Какой угол α составляет палочка m с нитью.



Ответы и решения

1. По определению ускорения имеем

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t}$$

где v_2 - конечная скорость (при движении из города В в город А, вектор направлен из В в А, величина - $v_2 = 1,2v$), v_1 - начальная скорость (при движении из города А в город В, вектор направлен из А в В, величина - $v_1 = v$),

$$t = \frac{S}{1,2v} + \frac{S}{v} = \frac{2,2S}{1,2v}$$

Полное время движения между городами А и В и обратно. Поскольку вектор $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ направлен из В в А и его модуль равен $2,2v$, получаем

$$a_{ср} = \frac{1,2v^2}{S},$$

Вектор направлен из города В в город А.

2. Пусть в начале этого участка пути тело имеет скорость v_0. Тогда для времени его прохождения имеем

$$h = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$$

Откуда находим

$$v_0 = \frac{h}{t} - \frac{gt}{2}$$

Теперь по закону сохранения энергии находим скорость тела в конце одной пятой части этого участка пути

$$v = \sqrt{\frac{h^2}{t^2} - \frac{3}{5}gh + \frac{g^2t^2}{4}}$$

3. Пусть объем тела V. Тогда закон Клапейрона-Менделеева для начального и конечного состояний газа дает

$$p\left(hS - V\right) = \nu RT$$
$$p\left(1,1hS - V\right) = 1,2\nu RT$$

где p - давление газа (одинаковое и в начале и в конце процесса, поскольку поршень не закреплен), ν - количество вещества газа. Деля уравнения друг на друга, получим

$$\frac{hS - V}{1,1hS - V} = \frac{1}{1,2}$$

Откуда

$$V = \frac{hS}{2}$$

4. Поскольку внешние по отношению к системе шариков силы действуют только в вертикальном направлении, центр масс системы движется вертикально вниз. Поэтому средний шарик движется вертикально вниз, скорость левого шарика в момент падения палочки на землю равна нулю, а скорость падения правого шарика вдвое больше скорости среднего (поскольку в момент падения движение палочки представляет собой вращение вокруг левого шарика).

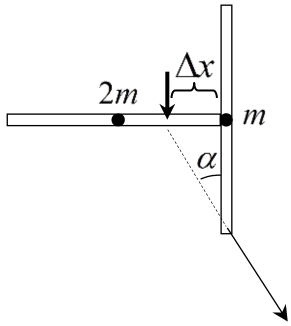
Используя далее закон сохранения энергии, получим

$$\frac{mv^3}{2} + \frac{2m\left(2v\right)^2}{2} = mgl\sin\alpha + 2mg2l\sin\alpha$$

где v - скорость среднего шарика, $2v$ - скорость правого. Откуда находим скорости шариков

$$v_{лев} = 0, \qquad v_{ср} = v = \sqrt{\frac{10gl\sin\alpha}{9}}, \qquad v_{прав} = 2v = 2\sqrt{\frac{10gl\sin\alpha}{9}}$$

5. Поскольку палочки движутся медленно, сумма сил и сумма моментов всех сил, действующих на палочки, равна нулю. Это значит, что момент силы трения относительно точки приложения внешней силы должен быть равен нулю. А поскольку силы трения, приложенные к различным малым элементам палочек, пропорциональны их массам и одинаково направлены, для вычисления момента силы трения можно воспользоваться тем же приемом, что и для вычисления момента силы тяжести: считать, что сила трения приложена к центру тяжести палочек. Поэтому линия действия внешней силы должна проходить через центр тяжести палочек.



Найдем положение их центра тяжести. Для этого заменим палочки точечными массами, расположенными в их центрах, и найдем их центр тяжести. Так как масса «перекладинки» буквы «Т» вдвое меньше массы ее «ножки», расстояние Δx от середины «перекладинки» до центра тяжести палочек составит 2/3 расстояния от середины «перекладинки» до середины «ножки» (см. рисунок, центр тяжести палочек отмечен стрелкой):

$$\Delta x = \frac{2}{3}\frac{l}{2} = \frac{l}{3}$$

Поэтому

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{l/3}{l/2} = \frac{2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}\right)$$