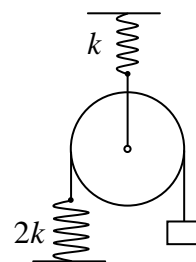


2.6. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 9 класс

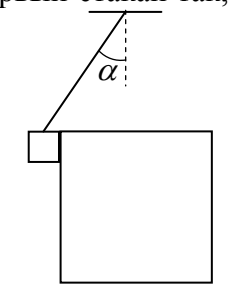
1. (2 балла) У проходной Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ» образовалась очередь школьников, желающих принять участие в заключительном туре олимпиады «Росатом», длиной $L = 80$ метров. Каждую минуту первые $n = 8$ человек из очереди проходят через проходную, а за это время в конец очереди приходят $k = 4$ новых человек. Через $t = 40$ минут очередь исчезла. С какой средней скоростью двигались люди, пока они находились в очереди? Ответ выразите в метрах в минуту. Сколько человек участвовало в олимпиаде? Считать, что каждый человек занимает в очереди одинаковое место.

2. (2 балла) Через блок, прикрепленный к потолку с помощью пружины, перебросили веревку. К одному концу веревки прикрепили тело массой m , к другому пружину, второй конец которой закреплен на полу (см. рисунок). Коэффициенты жесткости пружин k и $2k$ (см. рисунок). На сколько переместится тело по сравнению с положением, когда пружины не деформированы? Массой блока пренебречь.



3. (2 балла) Между городами А и В ездят Мерседес и Жигули. Скорость Жигулей составляет $2/3$ от скорости Мерседеса. Жигули выезжают из города А, Мерседес через некоторое время выезжает из города В. Оказалось, что они встречаются ровно посередине отрезка АВ. В этот момент они разворачиваются и едут назад. Доехав до городов, из которых они выехали (Жигули – до города А, Мерседес – до В), они снова разворачиваются и едут навстречу друг другу. Затем опять встречаются, разворачиваются и т.д. На каком расстоянии от города А произойдет 2016 встреча Мерседеса и Жигулей, если они ездят с постоянными скоростями, а разворачиваются мгновенно? Расстояние между городами - L .

4. (2 балла) Имеется два стакана с водой. В первом стакане содержится некоторое количество холодной воды, во втором – вдвое большее количество горячей воды. Когда из первого стакана перелили некоторое количество воды во второй стакан, температура воды в нем понизилась на величину Δt . Затем из второго стакана такое же количество воды вернули назад в первый стакан так, количество воды в стаканах стало равно первоначальному. На сколько повысилась температура воды в первом стакане? Потерями тепла и теплоемкостью стаканов пренебречь.



5. (2 балла) Тело в форме куба массой $10m$ удерживают на гладкой горизонтальной поверхности. Второе тело массой m подвешено к потолку на невесомой нити, составляющей угол α с вертикалью, и касается куба. Тела отпускают. Найти ускорения тел. Трением пренебречь. Считать, что куб не переворачивается.

Ответы и решения

1. «Хвост» очереди перемещается со следующей средней скоростью

$$v_x = \frac{L}{t} = 2 \text{ м/мин}$$

Где $L = 80$ м – первоначальная длина очереди, $t = 40$ мин – время «рассасывания» очереди. При этом очередь каждую минуту становится короче на

$$N = n - k = 2 \text{ 1/мин}$$

человек (размерность величин n и k - 1/мин). Это значит, что каждый человек занимает в очереди следующее место

$$\Delta l = \frac{L}{t(n-k)} = 0,5 \text{ м}$$

Поскольку при движении очереди каждую минуту проходят $n=8$ человек, то каждый человек проходит в минуту расстояние $n\Delta l$, и, следовательно, скорость человека

$$v = n\Delta l = \frac{nL}{t(n-k)} = 4 \text{ м/мин}$$

Поскольку каждую минуту проходят $n=8$ человек, а очередь рассасывается за время $t=40$ минут, то в олимпиаде участвовало

$$N_1 = nt = 320 \text{ человек.}$$

2. Поскольку груз в равновесии сила натяжения веревки, переброшенной через блок, равна mg . Со стороны этой веревки на блок действует удвоенная сила натяжения, т.е. $2mg$. Поэтому сила натяжения нити, удерживающей верхний блок - $2mg$. Следовательно, блок опустился по сравнению с положением, когда верхняя пружина не деформирована, на величину

$$\Delta x_1 = \frac{2mg}{k}$$

и, следовательно, на эту величину уменьшилось расстояние от пола до блока. Поэтому, если бы нижняя веревка не растягивалась, тело опустилось бы на удвоенную величину Δx_1 . А поскольку нижняя веревка растянулась на величину

$$\Delta x_2 = \frac{mg}{2k},$$

то тело опустилось на

$$\Delta l = 2\Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{4mg}{k} + \frac{mg}{2k} = \frac{9mg}{2k}$$

3. Поскольку сумма расстояний, пройденных машинами от одной встречи до другой, равна удвоенному расстоянию между городами, то между двумя последовательными встречами Мерседеса и Жигулей проходят одинаковые интервалы времени, равные

$$\Delta t = \frac{2L}{v_1 + v_2} = \frac{4L}{5v_1}$$

Где L - расстояние между городами, v_1 и $v_2 = 3v_1/2$ - скорости Жигулей и Мерседеса. Поэтому до второй встречи Жигули пройдут расстояние

$$S_1 = v_1 \Delta t = \frac{4L}{5}$$

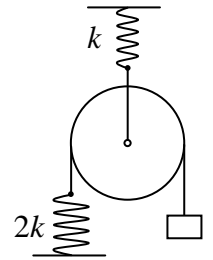
Поэтому вторая встреча машин произойдет на расстоянии

$$L_1 = S_1 - \frac{L}{2} = \frac{4L}{5} - \frac{L}{2} = \frac{3L}{10}$$

от города А, третья – посередине между городами, четвертая – снова на расстоянии $3L/10$, пятая – снова посередине и т.д. Таким образом, 2016 встреча между машинами произойдет на расстоянии $3L/10$ от города А.

4. Эту задачу проще всего решить, подводя тепловой баланс для начального и конечного состояний воды в стаканах (т.е. не рассматривая процессы переливания воды). Итак, пусть масса воды в первом стакане m , во втором - $2m$. Так как масса воды в стаканах в конце процесса равна первоначальной, а температура воды во втором стакане уменьшилась на величину Δt , в течение двух переливаний вода во втором стакан отдала количество теплоты $Q = c2m\Delta t$ (c - удельная теплоемкость воды). Поскольку по условию теплопотери отсутствуют, это количество теплоты приняла вода в первом стакане. Поэтому

$$cm\Delta t_1 = c2m\Delta t$$



где Δt_1 - изменение температуры воды в первом стакане. Отсюда получаем

$$\Delta t_1 = 2\Delta t$$

5. Обозначим массу куба M . Силы, действующие на тело и куб, показаны на рисунке. Поэтому уравнения движения тела и куба дают

$$m\vec{a}_1 = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}$$

$$M\vec{a}_2 = M\vec{g} + \vec{N}' + \vec{N}_1$$

Очевидно, ускорение куба направлено горизонтально, ускорение тела (в первый момент после отпускания тел, когда тело не успело набрать скорость) – перпендикулярно нити. Поэтому спроецируем уравнения движения для куба на горизонтальную ось, для тела – на ось, перпендикулярную нити. Получим

$$ma_1 = mg \sin \alpha - N \cos \alpha$$

$$Ma_2 = N$$

Поскольку тела недеформируемы, проекции их ускорений на направление, перпендикулярное плоскости касания, должны быть одинаковы

$$a_1 \cos \alpha = a_2$$

Решая полученную систему уравнений, находим

$$a_1 = \frac{mg \sin \alpha}{m + M \cos^2 \alpha}, \quad a_2 = \frac{mg \sin \alpha \cos \alpha}{m + M \cos^2 \alpha}$$

Подставляя теперь в эти формулы $M = 10m$, получим

$$a_1 = \frac{g \sin \alpha}{1 + 10 \cos^2 \alpha}, \quad a_2 = \frac{g \sin \alpha \cos \alpha}{1 + 10 \cos^2 \alpha}$$

