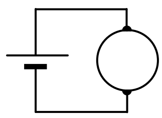
2.16. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 8 класс



1. Полюса источника тока подключают к противоположным полюсам проводящего сплошного шара. В каком сечении шара при прохождении электрического тока будет выделяться наибольшая мощность? Ответ обосновать.

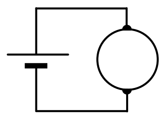
2. Два груза с массами m_1 и m_2 уравновешены на неравноплечих весах ($m_1 < m_2$). Грузы меняют местами, добавляя к грузу m_2 точно такой же груз, и равновесие весов нарушается. Какой дополнительный груз следует добавить к грузу m_1, чтобы равновесие весов восстановилось?

3. Команда из трех спортсменов должна пройти по определенному маршруту за минимальное время. Длина маршрута $l = 18$ км. Спортсмены могут бежать со скоростью $v = 14$ км/ч, или ехать на велосипеде со скоростью $3v$. При этом на команду полагается только один одноместный велосипед. Предложите стратегию движения на маршруте, обеспечивающую минимальное время его прохождения, и найдите это минимальное время. Время прохождения маршрута определяется по последнему пришедшему к финишу спортсмену.

4. Два друга решили сосчитать количество ступенек эскалатора, находящихся между входом и выходом с него. Они одновременно ступили на эскалатор, причем в то время, как один делал два шага, другой делал один шаг (через ступеньки никто из них не перескакивал). Чтобы дойти до верхнего конца эскалатора, тому кто шагал быстрее, пришлось сделать 28 шагов, другому - 21 шаг. Сколько ступенек имеет эскалатор снизу доверху?

5. Фигуристы исполняют следующий элемент: фигуристка вращается с постоянной скоростью вокруг своей оси, фигурист также с постоянной скоростью совершает обороты вокруг партнерши (в том же направлении). Известно, что фигурист сделал два полных оборота вокруг партнерши за время $t = 10$ секунд, за это время фигуристка $n = 9$ раз повернулась лицом к своему партнеру, причем первый раз (из этих 9) фигуристка была повернута к нему лицом в самом начале элемента, последний – в конце. За какое время фигуристка совершает один оборот?

Ответы и решения



1. Полюса источника тока подключают к противоположным полюсам шара. В каком сечении шара при прохождении электрического тока будет выделяться наибольшая мощность? Ответ обосновать.

Решение. Если мысленно разбить шар на слои, перпендикулярные направлению тока, то шар можно рассматривать как последовательно соединенные резисторы с разным сопротивлением. При последовательном соединении ток через каждый резистор одинаков, поэтому выделяемая мощность максимальна там, где максимально сопротивление. А поскольку сопротивление обратно площади поперечного сечения проводника, то наибольшим сопротивлением обладают участки около полюсов шара (точек присоединения проводов). Поэтому в этих точках и выделяется наибольшая мощность.

2. Два груза с массами m_1 и m_2 уравновешены на неравноплечих весах ($m_1 < m_2$). Грузы меняют местами, добавляя к грузу m_2 точно такой же груз, и равновесие весов нарушается. Какой дополнительный груз следует добавить к грузу m_1, чтобы равновесие весов восстановилось?

Решение. Условия равновесия грузов в первом и втором случае дают

$$m_1 l_1 = m_2 l_2$$
$$2m_2 l_1 = (m_1 + \Delta m) l_2$$

где l_1 и l_2 - плечи весов, Δm - масса дополнительного груза. Деля уравнения друг на друга, находим

$$\Delta m = \frac{2m_2^2 - m_1^2}{m_1}$$

3. Команда из трех спортсменов должна пройти по определенному маршруту за минимальное время. Длина маршрута $l = 18$ км. Спортсмены могут бежать со скоростью $v = 14$ км/ч, или ехать на велосипеде со скоростью $3v$. При этом на команду полагается только один одноместный велосипед. Предложите стратегию движения на маршруте, обеспечивающую минимальное время его прохождения, и найдите это минимальное время. Время прохождения маршрута определяется по последнему пришедшему к финишу спортсмену.

Решение. Чтобы максимально использовать велосипед, спортсмены должны двигаться так: два бегут, третий едет на велосипеде. Проехав 1/3 пути, третий спортсмен оставляет велосипед и дальше бежит. Когда первый и второй спортсмены добегают до велосипеда, один начинает ехать на велосипеде, второй продолжает бежать. Проехав вторую треть пути, тот спортсмен, который едет на велосипеде, оставляет велосипед и дальше бежит. Третий, добежав до велосипеда, начинает ехать на нем. В результате все три спортсмена добегают до пункта назначения одновременно, пробежав 2/3 пути и проехав на велосипеде 1/3 пути. А время прохождения дистанции равно

$$t = \frac{2l/3}{v} + \frac{l/3}{3v} = \frac{7l}{9v} = 1 \text{ час}$$

4. Два друга решили сосчитать количество ступенек эскалатора, находящихся между входом и выходом с него. Они одновременно ступили на эскалатор, причем в то время, как один делал два шага, другой делал один шаг (причем через ступеньки никто из них не перескакивал). Чтобы дойти до верхнего конца эскалатора, тому, кто шагал быстрее, пришлось сделать 28 шагов, другому - 21 шаг. Сколько ступенек имеет эскалатор снизу доверху?

Решение. Пусть количество ступенек на эскалаторе сверху донизу равно N, длина каждой ступеньки (вдоль эскалатора) равна Δl, первый друг совершает шаг за время Δt, второй – за время $2\Delta t$.

Так как первый друг сделал во время подъема 28 шагов, то он затратил на это время $28\Delta t$, а $N - 28$ ступенек ушли наверху под порожек эскалатора. Поэтому скорость эскалатора равна

$$v_э = \frac{(N-28)\Delta l}{28\Delta t}$$

Второй сделал 21 шаг, значит за время $42\Delta t$ под верхний порожек эскалатора ушли $N-21$ ступенек. Поэтому скорость эскалатора будет равна

$$v_э = \frac{(N-21)\Delta l}{42\Delta t}$$

Приравнивая эти скорости и решая уравнение относительно N, получим

$$N = 42$$

5. Пусть фигуристка делает полный оборот за время t_2. Фигурист делает один оборот за время $t_1 = t/2 = 5$ секунд. По условию между двумя моментами, когда фигуристка повернута лицом к партнеру, проходит время

$$t_0 = \frac{t}{n-1}.$$

Пусть фигуристка успевает повернуться за это время на угол α. Тогда

$$t_0 = \frac{\alpha}{360} t_2$$

или

$$\frac{1}{t_2} = \frac{\alpha}{360}\frac{1}{t_0} \qquad (*)$$

С другой стороны, фигурист успевает повернуться за это время на угол $360° + \alpha$, и

$$t_0 = \frac{360+\alpha}{360} t_1$$

или

$$\frac{1}{t_1} = \frac{360+\alpha}{360}\frac{1}{t_0} = \frac{1}{t_0} + \frac{\alpha}{360}\frac{1}{t_0} \qquad (**)$$

Вычитая формулы (*) и (**), получим

$$\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} = \frac{1}{t_0}$$

Отсюда находим

$$t_2 = \frac{t_0 t_1}{t_1 + t_0} = \frac{t}{n+1} = 1 \text{ с}$$