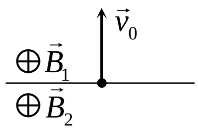
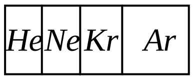
2.6. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс (Москва)

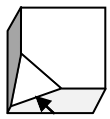


1. В двух полупространствах созданы однородные магнитные поля с индукциями $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ ($B_2 = 2B_1$), векторы которых параллельны. Частица с зарядом q и массой m находится на границе раздела полей и имеет скорость $\vec{v}_0$, направленную перпендикулярно границе раздела. Найти среднюю скорость смещения частицы вдоль границы раздела полей за большое время.

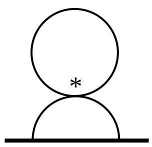


2. Цилиндр объема V разделен тремя подвижными поршнями на четыре отсека, объемы которых относятся как 1:1:1:2 (начиная с левого). В отсеках содержатся гелий He, неон Ne, криптон Kr и аргон Ar. Давление в сосуде p. В некоторый момент поршни становятся полупрозрачными и начинают пропускать молекулы газов, которые были слева (левый поршень пропускает гелий, но не пропускает остальные газы, средний пропускает гелий и неон, но не пропускает криптон и аргон, правый поршень пропускает все газы, кроме аргона). Найти давление в самом правом отсеке и его объем после установления равновесия.

3. Цилиндр из сухого льда (твердой углекислоты) радиусом R и высотой $h = R/2$ стоит на своем основании на плоской поверхности. Лед испаряется так, что с единицы площади в единицу времени с открытой поверхности испаряется масса льда σ. За какое время весь лед испарится? Плотность льда ρ.

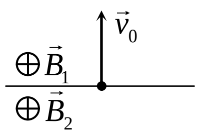


4. Из листа фанеры вырезали равносторонний треугольник массой m и поставили его в угол между тремя перпендикулярными поверхностями так, что треугольник касается своими сторонами всех трех граней угла (см. рисунок). Какой горизонтальной силой нужно действовать на середину нижней стороны треугольника, чтобы он покоился?



5. На вершину закрепленной полусферы радиуса R ставят шар того же радиуса со смещенным центром тяжести («ванька-встанька»). Центр тяжести шара находится ниже его центра на расстоянии $2R/3$ от центра (см. рисунок; центр тяжести шара показан звездочкой). Будет ли такое положение шара устойчивым? Проскальзывания нет. Ответ обосновать.

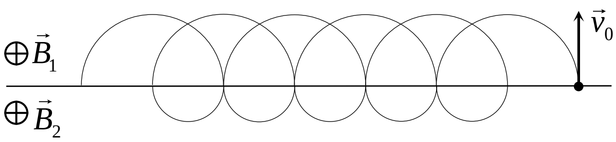
Ответы и решения



1. В двух полупространствах созданы однородные магнитные поля с индукциями $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ ($B_2 = 2B_1$), векторы которых параллельны. Частица с зарядом q и массой m находится на границе раздела полей и имеет скорость $\vec{v}_0$, направленную перпендикулярно границе раздела. Найти среднюю скорость смещения частицы вдоль границы раздела полей за большое время.

Решение. В верхнем и нижнем полупространствах частица будет двигаться по полуокружности с постоянной скоростью. Однако из-за неодинаковости индукций магнитного поля радиусы этих окружностей

$$R = \frac{mv_0}{qB}$$



будут различными, причем радиус окружности в верхнем полупространстве R_1 будет вдвое больше радиуса окружности в нижнем R_2 (см. рисунок). Поэтому за период частица сдвинется вдоль границы раздела полупространств на расстояние

$$\Delta x = 2\left(R_1 - R_2\right) = \frac{2mv_0\left(B_2 - B_1\right)}{qB_1B_2}$$

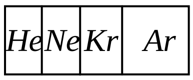
За время

$$t = \frac{\pi R_1}{v_0} + \frac{\pi R_2}{v_0} = \frac{\pi\left(R_1 + R_2\right)}{v_0} = \frac{\pi m\left(B_2 + B_1\right)}{qB_1B_2}$$

Поэтому средняя за время одного прохождения частицы по двум полупространствам скорость частицы (или за большое время, включающее в себя много таких прохождений) будет равна

$$v_{cp} = \frac{\Delta x}{t} = \frac{2v_0\left(B_2 - B_1\right)}{\pi\left(B_2 + B_1\right)} = \frac{2v_0}{3\pi}$$

2. Цилиндр объема V разделен тремя подвижными поршнями на четыре отсека, объемы которых относятся как 1:1:1:2 (начиная с левого). В отсеках содержатся гелий He, неон Ne, криптон Kr и аргон Ar. Давление в сосуде p. В некоторый момент поршни становятся полупрозрачными и начинают пропускать молекулы газов, которые были слева (левый поршень пропускает гелий, но не пропускает остальные газы, средний пропускает гелий и неон, но не пропускает криптон и аргон, правый поршень пропускает все газы, кроме аргона). Найти давление в самом правом отсеке и его объем после установления равновесия.



Решение. Гелий будет распределен по сосуду с одинаковой концентрацией независимо от положения всех поршней. Поэтому парциальное давление гелия на все поршни (и справа и слева) будет одинаковым независимо от их положения. Поэтому при исследовании положений поршней гелий можно не учитывать. А поскольку в самом левом отсеке других газов нет, левый поршень прижмется к стенке сосуда.

По аналогичным причинам при исследовании положения среднего и правого поршней можно не учитывать неон. А поскольку во втором слева отсеке, нет других газов, кроме гелия и неона (которые никак не повлияют на положение второго слева поршня, а справа от него есть криптон, второй поршень также окажется около левой стенки сосуда.

Точно также около левой стенки сосуда находится и третий поршень. Поэтому объем самой левой части сосуда будет равен объему всего сосуда V. Найдем давление газов.

Пусть количество вещества гелия в сосуде равно ν. Тогда, очевидно, что количество вещества неона и криптона также равно ν, аргона - 2ν. Тогда давление газа в сосуде до прохождения газов через перегородки можно найти по закону Клапейрона-Менделеева для газа в любом отсеке

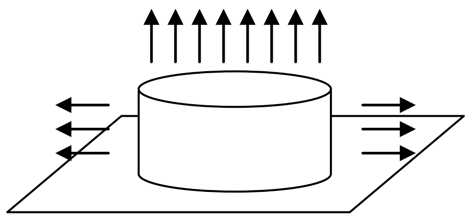
$$p=\frac{\nu RT}{\left(V/5\right)}=\frac{5\nu RT}{V}$$

С другой стороны после установления равновесия все четыре газа будут заполнять весь объем сосуда, поэтому по закону Дальтона имеем для конечного давления газа в сосуде p_f

$$p_f=\frac{\left(\nu+\nu+\nu+2\nu\right)RT}{V}=\frac{5\nu RT}{V}$$

Отсюда заключаем, что конечное давление равно начальному.

3. Цилиндр из сухого льда (твердой углекислоты) радиусом R и высотой $h=R/2$ стоит на своем основании на плоской поверхности. Лед испаряется так, что с единицы площади в единицу времени с открытой поверхности испаряется масса льда σ. За какое время весь лед испарится? Плотность льда ρ.



Решение. Испарение цилиндра происходит с верхнего основания и с боковой поверхности. Поэтому с течением времени меняется и площадь основания (из-за бокового испарения), и площадь боковой поверхности (за счет уменьшения радиуса и высоты). Найдем скорость уменьшения размеров цилиндра.

Пусть открытая поверхность углекислоты (с которой и происходит испарение) равна S. Тогда за малое время Δt испарится тонкий слой, толщиной Δh, которую можно найти из очевидного соотношения

$$\sigma S\Delta t=\rho\Delta hS$$

Откуда находим скорость уменьшения размеров углекислоты

$$\frac{\Delta h}{\Delta t}=v=\frac{\sigma}{\rho}$$

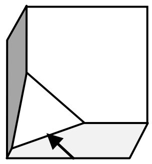
Из этой формулы следует, что скорость уменьшения размеров не зависит от площади поверхности, с которой происходит испарение. Это значит, что испарение с боковой поверхности не изменяет скорость испарения с основания, а испарение с основания – скорость испарения с боковой поверхности. Поэтому с боковой поверхности и с основания углекислота испарится за время

$$t_{бок}=\frac{R}{v}=\frac{R\rho}{\sigma},\qquad t_{осн}=\frac{h}{v}=\frac{R\rho}{2\sigma}$$

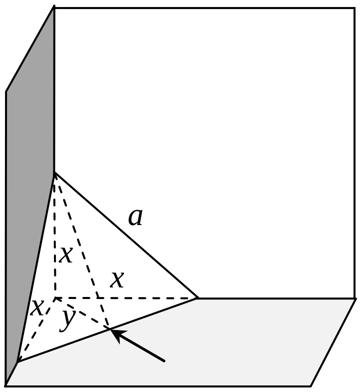
Поскольку время испарения с основания меньше, цилиндр испарится за время

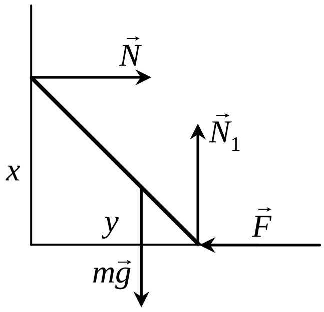
$$t=\frac{R\rho}{2\sigma}$$

4. Из листа фанеры вырезали равносторонний треугольник массой m и поставили его в угол между тремя взаимно перпендикулярными поверхностями так, что треугольник касается своими сторонами всех трех граней угла (см. рисунок). Какой минимальной горизонтальной силой нужно действовать на середину нижней стороны треугольника, чтобы он покоился?



Решение. Очевидно, что в данном положении пластинка взаимодействует с вертикальными стенками угла только в одной точке. Действительно, треугольник может касаться своими сторонами граней угла только в единственном положении; если сдвинуть треугольник вниз на бесконечно малую величину контакт между стенками и сторонами треугольника пропадет, и он будет опираться на ребро угла только своей вершиной. Следовательно, на треугольник действуют: две силы реакции (со стороны ребра и нижней грани угла), сила тяжести, приложенная к центру тяжести – точке пересечения медиан, искомая сила $\vec{F}$.





Геометрически очевидно, что (см. рисунок)

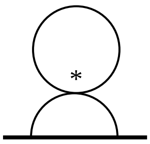
$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}; \qquad y = \frac{a}{2}$$

Поэтому условие моментов относительно середины нижней стороны треугольника (с учетом того, что точка пересечения медиан делит каждую медиану в соотношении 2:1) дает

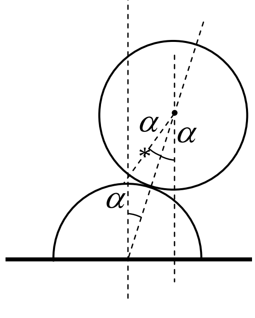
$$Nx = mg\frac{1}{3}y \qquad \Rightarrow \qquad N = \frac{mg}{3\sqrt{2}}$$

А поскольку $F = N$ (это следует из проекции условия сил на горизонтальную ось), то

$$F = \frac{mg}{3\sqrt{2}}$$



5. На вершину закрепленной полусферы радиуса R ставят шар того же радиуса со смещенным центром тяжести («ванька-встанька»). Центр тяжести шара находится ниже его центра на расстоянии $2R/3$ от центра (см. рисунок; центр тяжести шара показан звездочкой). Будет ли такое положение шара устойчивым? Проскальзывания нет.



Решение. Отклоним верхний шар от положения равновесия и исследуем вопрос о смещении центра тяжести, если он поднимется, положение равновесия шара будет устойчивым. В начальном состоянии центр тяжести верхнего шара находился на высоте

$$h_0 = 2R - \frac{2}{3}R = \frac{4}{3}R$$

Пусть верхний шар отклонился так, что направление на точку касания шаров составляет малый угол α с вертикалью (см. рисунок). Тогда (поскольку проскальзывания шаров нет) направление на центр тяжести верхнего шара из его центра будет составлять такой же угол α с направлением на новую точку касания. Поэтому высоту нового положения центра тяжести по отношению к основанию нижнего полушара можно найти как

$$h_1 = 2R\cos\alpha - \frac{2}{3}R\cos 2\alpha$$

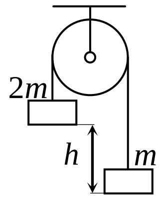
Используя далее известную тригонометрическую формулу $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\left(\alpha/2\right)$ и учитывая, что для малого угла $\sin\alpha \approx \alpha$, получим

$$h_1 = \frac{4}{3}R - R\alpha^2 + \frac{4}{3}R\alpha^2 = \frac{4}{3}R + \frac{1}{3}R\alpha^2 > h$$

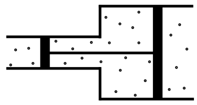
Таким образом, центр верхнего шара при отклонении поднимается, и, следовательно, его положение на «вершине» полушара – устойчивое.

2.7. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс (Нижний Новгород, Рязань, Глазов)

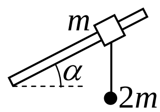
1. Четыре заряда q расположены в вершинах правильного тетраэдра со стороной a. В середину одной из сторон тетраэдра помещают точечный заряд $2q$. Найти силу, действующую на него со стороны остальных зарядов.



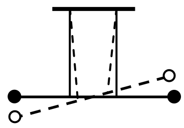
2. Два маленьких груза массой m и $2m$ соединены тросом, переброшенным через блок. Масса единицы длины троса - λ. В начальном положении расстояние между грузами - h. На сколько изменится потенциальная энергия системы трос-грузы, когда грузы окажутся на одной высоте?



3. Имеются две трубы, площади сечений которых относятся как $5/2$. Трубы состыкованы и в них вставлены соединенные стержнем поршни, перекрывающие трубы герметично. Между поршнями находится идеальный газ. При температуре T_0 поршни находятся на одинаковых расстояниях от стыка труб. Объем газа между поршнями V. Газ охлаждают до температуры $T_0/3$. Какими будут давление и объем газа между поршнями? Атмосферное давление p_0. Ответ обосновать.



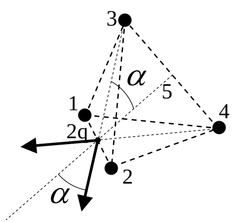
4. Гладкий стержень образует угол α с горизонтом. На стержень надета муфта массой m, которая может скользить по стержню. К муфте на невесомой нити прикреплено тело массой $2m$. Вначале муфту удерживали, нить была вертикальна (см. рисунок). Найти силу натяжения нити сразу после того, как муфту отпустят.



5. Стержень длиной l, на концах которого закреплены два одинаковых маленьких тела массой m, подвешен на двух вертикальных нитях длиной h. Расстояние между нитями $2l/3$, нити прикреплены симметрично относительно центра тяжести стержня, стержень горизонтален. Стержень поворачивают на малый угол вокруг вертикальной оси и отпускают. Найти частоту малых колебаний стержня.

Ответы и решения

1. Четыре заряда q расположены в вершинах правильного тетраэдра со стороной a. В середину одной из сторон тетраэдра помещают точечный заряд $2q$. Найти силу, действующую на него со стороны остальных зарядов.



Решение. Очевидно, сила, действующая на заряд $2q$ со стороны зарядов 1 и 2 (см. рисунок) компенсируют друг друга. Найдем силы, действующие на заряд $2q$ со стороны зарядов 3 и 4. Расстояния 3-$2q$ и 4-$2q$ (см. рисунок) равны $\sqrt{3}a/2$. Поэтому силы, действующие со стороны зарядов 3 и 4 на заряд $2q$ равны

$$F_1=\frac{2kq^2}{\left(\sqrt{3}a/2\right)^2}=\frac{8kq^2}{3a^2}$$

где k - постоянная закона Кулона. Результирующая сила равна

$$F=2F_1\cos\alpha$$

где 2α - угол между 4-$2q$ и 3-$2q$. Этот угол легко найти из треугольника 3-5-$2q$. Очевидно

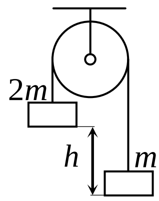
$$\sin\alpha=\frac{(a/2)}{\left(\sqrt{3}a/2\right)}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

поэтому

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Отсюда получаем окончательно

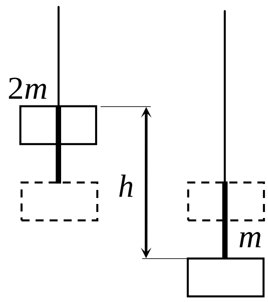
$$F=\frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\frac{kq^2}{a^2}$$



2. Два маленьких груза массой m и $2m$ соединены тросом, переброшенным через блок. Масса единицы длины троса - λ. В начальном положении расстояние между грузами - h. На сколько изменится потенциальная энергия системы трос-грузы, когда грузы окажутся на одной высоте?

Решение. Чтобы грузы оказались на одной высоте, верхний должен опуститься на $h/2$, нижний подняться на $h/2$ (см. рисунок; новые положения грузов показаны пунктиром). Поэтому изменение потенциальной энергии грузов будет равно

$$\Delta\Pi_{гр}=-2mg\frac{h}{2}+mg\frac{h}{2}=-mg\frac{h}{2}$$

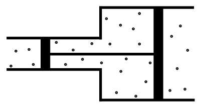


Найдем изменение потенциальной энергии троса. При рассматриваемом перемещении грузов произойдет перемещение троса, которое с точки зрения подсчета изменения потенциальной энергии можно считать таким: кусок троса длиной $h/2$, расположенный выше первоначального положения нижнего груза (выделен жирным), переместится и займет место выше конечного положения верхнего груза (выделен жирным). Все остальные участи троса останутся на месте. Таким образом, масса $\lambda\frac{h}{2}$ поднимется на высоту $\frac{h}{2}$ (см. рисунок). Поэтому изменение потенциальной энергии троса равно

$$\Delta\Pi_{тр}=\lambda g\frac{h^2}{4}$$

Отсюда находим изменение потенциальной энергии системы грузы-трос

$$\Delta\Pi = -mg\frac{h}{2} + \lambda g\frac{h^2}{4} = -\frac{gh}{2}\left(m - \frac{\lambda h}{2}\right)$$



3. Имеются две трубы, площади сечений которых относятся как $5/2$. Трубы состыкованы и в них вставлены соединенные стержнем поршни, перекрывающие трубы герметично. Между поршнями находится идеальный газ. При температуре T_0 поршни находятся на одинаковых расстояниях от стыка труб. Объем газа между поршнями V. Газ охлаждают до температуры $T_0/3$. Какими будут давление и объем газа между поршнями. Атмосферное давление p_0.

Решение. Рассмотрим условие равновесия поршней. Внешними силами по отношению к системе двух поршней, соединенных стержнем являются силы, действующие на них со стороны атмосферного воздуха, и воздуха между поршнями. Условие равновесия этой системы дает:

$$p_0(5S/2) + pS = p(5S/2) + p_0 S \tag{1}$$

где S и $5S/2$ - площади сечений труб, p_0 и p - атмосферное давление и давление газа в трубах. Из формулы (1) имеем

$$\left(p_0 - p\right)(5S/2) = \left(p_0 - p\right)S \tag{2}$$

Из формулы (2) следует, что поршни в такой трубе (из соединенных труб разных поперечных сечений) находятся в равновесии только в том случае, когда давление газа в трубах равно атмосферному. Это значит, что при охлаждении газа с ним происходит изобарический процесс с уменьшением объема. Для этого поршни должны перемещаться влево. Но объем газа между поршнями не может стать меньше, чем

$$V_{\min} = Sl$$

(где l - длина стержня, связывающего поршни), когда большой поршень подойдет вплотную к стыку труб. При этом объем газа в начальном состоянии равен

$$V_{нач} = \frac{l}{2}S + \frac{l}{2}\frac{5}{2}S = \frac{7}{4}Sl$$

Таким образом, после того как температура газа уменьшится в 7/4 раза правый поршень подойдет к стыку вплотную, а давление газа будет по-прежнему равно атмосферному. При дальнейшем уменьшении температуры объем газа изменятся не сможет, поэтому с газом будет проходить изохорический процесс, в котором будут меняться температура и давление. Из закона Клапейрона – Менделеева имеем

$$\frac{p_0}{\left(4/7\right)T_0} = \frac{p_1}{\left(1/3\right)T_0}$$

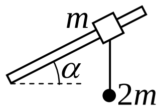
где p_1 - конечное давление газа. Отсюда

$$p_1 = \frac{7}{12}p_0$$

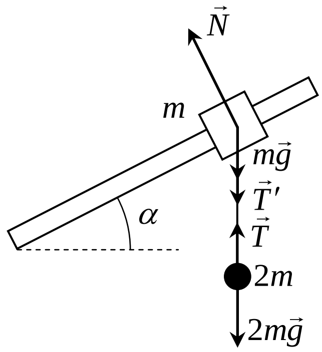
Таким образом, новое давление газа составит $7/12$ от старого, объем - $4/7$

$$p_1 = \frac{7}{12} p_0, \quad V_1 = \frac{4}{7} V$$

4. Стержень образует угол α с горизонтом. На стержень надета муфта массой m, которая может скользить по стержню. К муфте на невесомой нити прикреплено тело массой $2m$. Вначале муфту удерживали, нить была вертикальна (см. рисунок). Найти силу натяжения нити сразу после того, как муфту отпустят.



Решение. На муфту действуют силы тяжести, натяжения нити и реакции стержня, на тело – тяжести и натяжения нити. Второй закон Ньютона для тел в проекциях на направление стержня (для муфты) и для тела (на вертикальное) в самый первый момент после начала движения, когда веревка еще вертикальна, дает



$$ma_1 = (mg + T)\sin\alpha$$
$$2ma_2 = 2mg - T$$

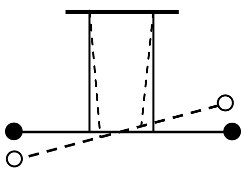
А поскольку нить при движении тел не растягивается и не «сминается» проекции векторов скорости тел на направление нити одинаковы в любой момент времени, следовательно, одинаковы и проекции ускорений

$$a_1 \sin\alpha = a_2$$

Решая эту систему уравнений, получим

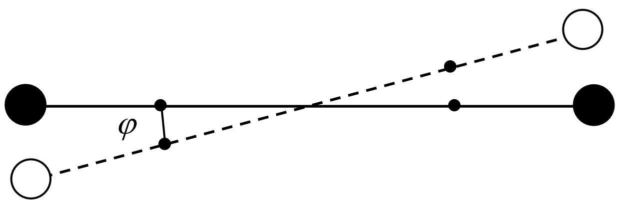
$$T = \frac{2mg\cos^2\alpha}{1 + 2\sin^2\alpha}$$

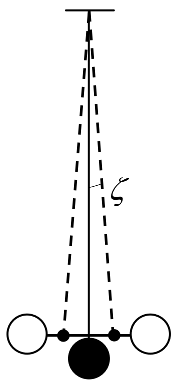
5. Стержень длиной l, на концах которого закреплены два одинаковых маленьких тела массой m, подвешен на двух вертикальных нитях длиной h. Расстояние между нитями $2l/3$, нити прикреплены симметрично относительно центра тяжести стержня, стержень горизонтален. Стержень поворачивают на малый угол вокруг вертикальной оси и отпускают. Найти частоту малых колебаний стержня.



Решение. Отклоним стержень с грузами на малый угол φ и найдем кинетическую и потенциальную энергию системы. Для малых углов они должны иметь вид

$$K = \frac{A\dot{\varphi}^2}{2}; \qquad \Pi = \frac{B\varphi^2}{2}$$





где A и B - некоторые числа, причем отношение B/A имеет смысл квадрата круговой частоты колебаний. Итак, повернем стержень на малый угол φ. Стержень при этом слегка поднимется вверх, поскольку нити, на которых он висит, отклонятся от вертикали (см. рисунок; левый рисунок - вид сверху, точками показаны места крепления нитей, правый рисунок – вид со стороны шариков).

Поскольку угол поворота стержня мал, точки крепления нитей сместятся по горизонтали относительно своих первоначальных положений на $\Delta x = \dfrac{l\varphi}{3}$. Поэтому для угла отклонения нитей от вертикали ζ имеем

$$h\zeta = \frac{l\varphi}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \zeta = \frac{l}{3h}\varphi$$

Следовательно, при повороте стержень поднимется на величину Δh, которую можно найти как

$$\Delta h = h\left(1-\cos\zeta\right) = 2h\sin^2\left(\zeta/2\right) = \frac{h\zeta^2}{2} = \frac{l^2\varphi^2}{18h}$$

А потенциальная энергия шариков увеличится на величину

$$\Delta\Pi = 2mg\Delta h = \frac{mgl^2\varphi^2}{9h} \qquad (*)$$

Кинетическая энергия шариков будет определяться соотношением

$$K = \frac{2mv^2}{2} = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{4} \qquad (*)$$

Из соотношений (*)-(**) находим круговую частоту колебаний стержня

$$\omega^2 = \frac{2mgl^2}{9h} : \frac{ml^2}{2} = \frac{4g}{9h} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{g}{h}}$$

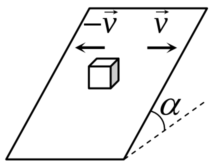
2.8. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс (Сергиев Посад, Обнинск, Киров, Озерск, Снежинск, Северск)

1. Маленькое тело движется по периметру квадрата со стороной d. Ускорение тела по величине не превосходит значения a (в том числе и при поворотах в вершинах квадрата). За какое минимальное время тело может совершить 2 полных обхода всего периметра?

2. Две концентрические металлические сферы радиусами R и $3R$ заряжены зарядами Q и $-4Q$ соответственно. Затем малую сферу заземляют с помощью проводника ничтожно малой емкости через малое отверстие в большой сфере. Какой заряд протечет по проводнику в направлении от малой сферы к земле.

3. На столе стоит открытый сверху цилиндрический сосуд высотой h. В сосуд опускают поршень массой m, создающий избыточное давление, равное атмосферному (т.е. $mg = p_0 S$, p_0 - атмосферное давление, S - площадь сосуда). После того как поршень остановится, а температура воздуха под ним сравняется с окружающей температурой, в сосуд опускают второй поршень, затем третий и т.д. Найти расстояние между вторым и третьим поршнем после того, как в сосуд опустили десять поршней. Поршни закрывают сосуд герметично.

4. Тело аккуратно положили на длинную наклонную плоскость с углом наклона к горизонту α. Коэффициент трения между телом и плоскостью μ ($\mu > \mathrm{tg}\alpha$). Затем плоскость стали двигать так, что она с большой частотой меняет свою скорость $\vec{v}$ на противоположную $-\vec{v}$ (см. рисунок). Найти установившуюся скорость движения тела.



5. Из цилиндрической заготовки радиуса R, высотой h токарь вырезает цилиндр радиуса $3R/4$, снимая металл за один проход. На какое максимальное расстояние смещается центр тяжести заготовки в процессе ее обработки?

Ответы и решения

1. Материальная точка движется по периметру квадрата со стороной d. Ускорение точки по величине не превосходит значения a. За какое минимальное время точка может совершить 2 полных обхода всего периметра?

Решение. Чтобы время прохода было минимальным, у тела должна быть максимальная скорость, но при повороте в вершине (поскольку радиус поворота $\to 0$) $a \to \infty$, если только скорость тела не равна нулю. Поэтому в вершинах тело должно иметь нулевую скорость. Поэтому тело будет двигаться так. Стартуя из вершины с нулевой начальной скоростью, тело разгоняется с максимальным ускорением до середины стороны, а затем тормозит с максимальным ускорением, чтобы попасть в вершину с нулевой скоростью. Поэтому время достижения середины стороны находится из уравнения

$$\frac{l}{2} = \frac{at_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_0 = \sqrt{\frac{l}{a}} \qquad (*)$$

Время прохождения стороны квадрата – вдвое больше, периметра – в восемь раз больше, а двух периметров – в шестнадцать раз больше времени (*)

$$t = 16t_0 = 16\sqrt{\frac{l}{a}}$$

2. Две концентрические металлические сферы радиусами R и $3R$ заряжены зарядами Q и $-4Q$ соответственно. Затем малую сферу заземляют с помощью проводника ничтожно малой емкости через малое отверстие в большой сфере. Какой заряд протечет по проводнику в направлении от малой сферы к земле.

Решение. После заземления потенциал малой сферы станет равным нулю. Поэтому для нового заряда малой сферы q справедливо условие

$$\frac{kq}{R} - \frac{4kQ}{3R} = 0$$

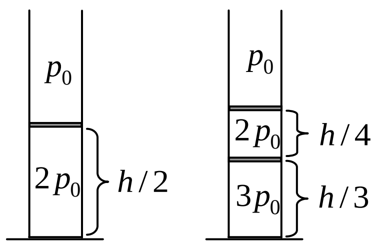
где k - постоянная закона Кулона. Отсюда

$$q = \frac{4Q}{3}$$

и, следовательно, от малой сферы к земле протечет заряд

$$\Delta q = Q - q = -\frac{Q}{3}$$

3. На столе стоит открытый сверху цилиндрический сосуд высотой h. В сосуд опускают поршень массой m, создающий избыточное давление, равное атмосферному (т.е. $mg = p_0 S$, p_0 - атмосферное давление, S - площадь сосуда). После того как поршень остановится, а температура воздуха под ним сравняется с окружающей температурой, в сосуд опускают второй поршень, затем третий и т.д. Найти расстояние между вторым и третьим поршнем после того, как в сосуд опустили десять поршней. Поршни закрывают сосуд герметично.



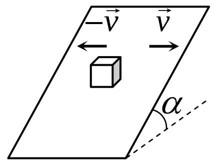
Решение. Когда в сосуд опускают первый поршень, он закрывает в сосуде такое количество воздуха при атмосферном давлении, которое занимало весь сосуд. После остановки первого поршня давление этого воздуха вырастает вдвое ($2p_0$), что означает, что первый поршень останавливается первый раз посередине сосуда (на расстоянии $h/2$ от его верха). Поэтому второй поршень закрывает в сосуде такое количество воздуха при атмосферном давлении, которое занимает половину сосуда. А так как давление воздуха между первым и вторым поршнем после остановки второго поршня должно стать равным $2p_0$, расстояние между первым и вторым поршнем в этот момент будет равно $h/4$. Давление воздуха под первым поршнем в этот момент будет равно $3p_0$. Это значит, что расстояние между дном сосуда и первым поршнем в этот момент будет равно $h/3$. Отсюда следует, что третий поршень закрывает в сосуде столб воздуха высотой

$$h-\frac{h}{3}-\frac{h}{4}=\frac{5h}{12}.$$

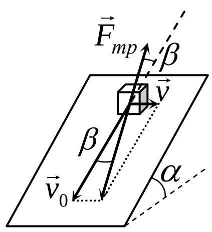
После того как в сосуд опустят 10 поршней, давление воздуха под третьим поршнем будет равно $9p_0$, т.е. увеличится в 9 раз по сравнению с атмосферным. Поэтому объем этого воздуха уменьшится в 9 раз. Следовательно расстояние между вторым и третьим поршнем будет равно

$$h_{2-3}=\frac{5h}{108}$$

4. Тело аккуратно положили на длинную наклонную плоскость с углом наклона к горизонту α. Коэффициент трения между телом и плоскостью μ ($\mu > \operatorname{tg}\alpha$). Затем плоскость стали двигать так, что она с большой частотой меняет свою скорость $\vec{v}$ на противоположную $-\vec{v}$ (см. рисунок). Найти установившуюся скорость движения тела.



Решение. Пусть установившаяся скорость тела v_0, которая направлена вниз вдоль плоскости. Но относительно плоскости тело будет двигаться под некоторым углом β к направлению наибыстрейшего спуска (в течение половины периода в одну сторону, в течение другой половины – в другую). Сила трения, действующая на тело со стороны плоскости, противоположна скорости тела относительно плоскости. Поэтому сила трения также направлена под углом β к направлению наибыстрейшего спуска (но вверх). В установившемся режиме проекция силы трения на направление наибыстрейшего спуска компенсирует составляющую силы тяжести вдоль плоскости - $mg\sin\alpha$



$$\mu mg\cos\alpha\cos\beta = mg\sin\alpha$$

Отсюда

$$\cos\beta=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\mu} \qquad (*)$$

А поскольку

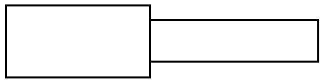
$$\operatorname{tg}\beta=\frac{v}{v_0}$$

из формулы (*) находим

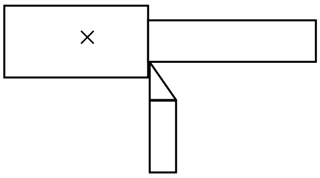
$$v_0=\frac{v\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\mu^2-\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

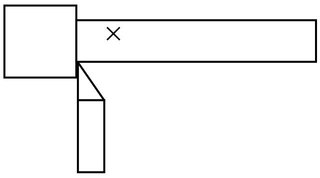
5. Из цилиндрической заготовки радиуса R, высотой h токарь вырезает цилиндр радиуса $3R/4$, снимая металл за один проход. На какое максимальное расстояние смещается центр тяжести заготовки в процессе ее обработки?

Решение. В процессе обработки заготовка представляет собой два состыкованных соосных цилиндра с радиусами R и $3R/4$ (см. рисунок). И центр тяжести заготовки в процессе ее обработки смещается, поскольку до обработки центр тяжести заготовки находится посередине, а, например, в положении, показанном на рисунке, центр тяжести заготовки находится левее ее середины. Докажем, что максимальным смещение центра тяжести будет в таком положении, в котором центр тяжести совпадает с положением резца (стыка между двумя частями заготовки).

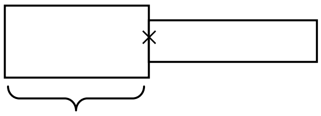


Действительно, пусть центр тяжести находится левее положения резца (стыка частей; см. левый рисунок, положение центра тяжести показано крестиком). Если в этом положении резец срежет какой-то небольшой объем заготовки, то ее центр тяжести сместится влево, поскольку мы уменьшаем часть заготовки справа от центра тяжести. Если центр тяжести находится слева от резца (правый рисунок), то при дальнейшей обработке заготовки центр тяжести будет перемещаться вправо. Т.о. пока резец при обработке заготовки с правого конца не «дошел» до ее центра тяжести, центр тяжести движется влево, когда «перешел» - вправо. Это значит, что максимальным смещение центра тяжести будет тогда, когда он совпадает с резцом.





Найдем из этого условия максимальное смещение центра тяжести. Пусть центр тяжести совпадает со стыком частей заготовки (тогда он максимально смещен от ее центра) и находится на расстоянии x от ее левого конца (см. рисунок). Тогда



$$m_л \frac{x}{2} = m_п \frac{l-x}{2}$$

где $m_л$ и $m_п$ - массы правой и левой частей. Отсюда

$$\rho\pi R^2 x \frac{x}{2} = \rho\pi \left(\frac{3R}{4}\right)^2 (l-x)\frac{l-x}{2}$$

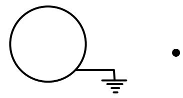
где ρ - плотность материала заготовки. Отсюда

$$x = \frac{3l}{7}$$

Это значит, что максимальное смещение центра тяжести заготовки при обработке

$$\Delta x = \frac{l}{2} - \frac{3l}{7} = \frac{l}{14}$$

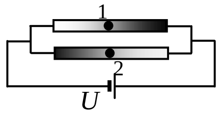
2.9. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс (Лесной, Курчатов, Ковров, Калининград, Смоленск, Нововоронеж, Калуга)



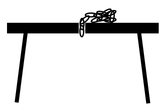
1. Точечный заряд q находится на расстоянии $7r$ от центра незаряженной металлической сферы радиуса r. Сферу заземляют с помощью длинного и тонкого проводника. Найти заряд сферы после установления равновесия. Ответ обосновать.

2. Легковая машина и грузовик связаны упругим легким шнуром. В некоторый момент времени грузовик начинает двигаться с постоянной скоростью v от машины, растягивая шнур. Через какое время после начала движения грузовика машина с ним столкнется? Какую скорость будет иметь легковая машина в этот момент? Масса машины m, жесткость шнура k, длина недеформированного шнура l_0. Закон Гука справедлив для любых растяжений шнура. При «сминании» шнур никакого воздействия не оказывает. Трения нет.

3. Найти КПД цикла, состоящего из двух изотерм и двух изохор, если КПД цикла Карно с нагревателем с температурой «верхней» изотермы и холодильником с температурой «нижней» равен η, а изменение внутренней энергии газа при изохорическом нагревании вдвое меньше его работы при изотермическом расширении. Рабочее тело цикла – идеальный газ.

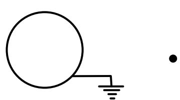


4. Два одинаковых цилиндрических проводника длиной L изготовили так, что удельное сопротивление материала проводников линейно возрастает в зависимости от расстояния от одного из концов l: $\rho(l)=\rho_0(1+2l/L)$ (см. рисунок; светлый конец проводника отвечает меньшему сопротивлению). Проводники подсоединили к идеальному источнику напряжения U разыми концами. Найти разность потенциалов между серединами проводников $\varphi_1-\varphi_2$.



5. В центре горизонтального гладкого стола, расположенного на высоте h от пола сделано отверстие. Около отверстия лежит свернутая в бухту цепочка с мелкими звеньями длиной $l=h$. Один конец цепочки тихонько сталкивают в отверстие, и цепочка начинает падать. Через какое время цепочка коснется пола? Ответ обосновать.

Ответы и решения



1. Точечный заряд q находится на расстоянии $7r$ от центра незаряженной металлической сферы радиуса r. Сферу заземляют с помощью длинного и тонкого проводника. Найти заряд сферы после установления равновесия. Ответ обосновать.

Решение. Поскольку сфера заземлена, ее потенциал (как и потенциал любой точки внутри сферы) будет равен нулю. Найдем потенциал в центре сферы. По принципу суперпозиции он равен сумме потенциала поля точечного заряда

$$\varphi_1=\frac{kq}{7r}$$

(k - постоянная закона Кулона) и зарядов сферы. Потенциал поля зарядов сферы будет равен сумме потенциалов всех точечных зарядов, на которые можно разбить сферу. А поскольку расстояние от всех точек сферы до ее центра равно ее радиусу, потенциал зарядов сферы в ее центре будет равен

$$\varphi_2 = \frac{kQ}{r}$$

где Q - заряд сферы (причем независимо от распределения заряда Q по поверхности сферы). Поэтому из условия $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$ находим

$$Q = -\frac{q}{7}$$

2. Легковая машина и грузовик связаны упругим легким шнуром. В некоторый момент времени грузовик начинает двигаться с постоянной скоростью v от машины, растягивая шнур. Через какое время после начала движения грузовика машина с ним столкнется? Какую скорость будет иметь легковая машина в этот момент? Масса машины m, жесткость шнура k, длина недеформированного шнура l_0. Закон Гука справедлив для любых растяжений шнура. При «сминании» шнур никакого воздействия не оказывает. Трения нет.

Решение. Перейдем в систему отсчета, связанную с грузовиком. В ней грузовик покоится, а машине в начальный момент сообщили скорость v. Затем машина движется, растягивая шнур, под действием упругой силы. Пока шнур растянут, это движение – гармоническое колебание с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Через половину периода машина снова окажется на расстоянии l_0 от грузовика, ее скорость также равна v, но направлена в сторону грузовика. После этого шнур сомнется и не будет оказывать влияния на машину. Поэтому машина будет двигаться с постоянной скоростью и достигнет грузовика через время l_0/v. Поэтому машина достигнет грузовика через время

$$t = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{l_0}{v}$$

В момент столкновения скорость машины относительно грузовика равна v, а, следовательно, ее скорость относительно земли равна $2v$.

3. Найти КПД цикла, состоящего из двух изотерм и двух изохор, если КПД цикла Карно с нагревателем с температурой «верхней» изотермы и холодильником с температурой «нижней» равен η, а изменение внутренней энергии газа при изохорическом нагревании вдвое меньше его работы при изотермическом расширении. Рабочее тело цикла – идеальный газ.

Решение. Пусть температура газа на «верхней» изотерме равна T_1, на нижней T_2. Тогда КПД цикла Карно с нагревателем с температурой T_1 и холодильником с температурой T_2 равен

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Двигатель получает тепло при изохорическом нагревании и изотермическом расширении. Найдем количество теплоты, полученное двигателем от нагревателя. Пусть изменение внутренней энергии газа при изохорическом расширении равно ΔU_V. Тогда по условию работа при изотермическом расширении - $A_T = 2\Delta U$. Применяя к этим процессам первый закон термодинамики, найдем количество теплоты, полученное от нагревателя

$$Q_н = Q_V + Q_T = \Delta U_V + A_T = 3\Delta U_T$$

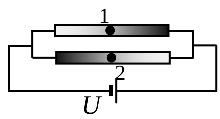
Найдем работу газа за цикл. Очевидно, эта работа равна разности работы, совершенной газом при изотермическом расширении, и работы, совершенной над газом при изотермическом сжатии. А поскольку работа – это площадь под графиком зависимости давления от объема, а давление при изотермическом сжатии в T_1/T_2 раз меньше давления при изотермическом расширении, то работа газа за цикл равна

$$A = A_T - \frac{T_2}{T_1} A_T = \frac{A_T\left(T_1 - T_2\right)}{T_1} = \frac{2\Delta U\left(T_1 - T_2\right)}{T_1}$$

Отсюда находим КПД данного в условии цикла

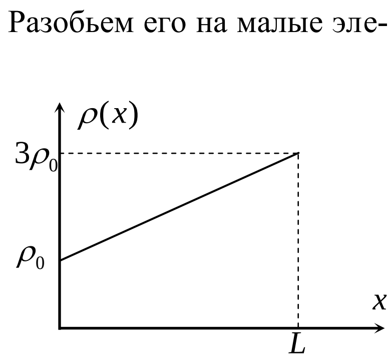
$$\eta_1 = \frac{A}{Q_н} = \frac{2\Delta U\left(T_1 - T_2\right)}{3\Delta U T_1} = \frac{2\eta}{3}$$

4. Два одинаковых цилиндрических проводника длиной L изготовили так, что удельное сопротивление материала проводников линейно возрастает в зависимости от расстояния от одного из концов l: $\rho(l) = \rho_0(1 + 2l/L)$ (см. рисунок; светлый конец проводника отвечает меньшему сопротивлению). Проводники подсоединили к идеальному источнику напряжения U разыми концами. Найти разность потенциалов между серединами проводников $\varphi_1 - \varphi_2$.



Решение. Найдем сначала общее сопротивление каждого проводника. Разобьем его на малые элементы длиной Δx_1, Δx_2, Δx_3, … Тогда общее сопротивление проводника равно

$$R = \frac{1}{S}\left(\rho(x_1)\Delta x_1 + \rho(x_2)\Delta x_2 + \rho(x_3)\Delta x_3 + ...\right)$$



(x отсчитывается от конца проводника). Для вычисления такой суммы построим график зависимости ρ от x. Тогда сумма в скобках равна площади под графиком этой функции (такая же логика используется при вычислении работы силы упругости). Отсюда находим сопротивление каждого проводника

$$R = \frac{2\rho_0 L}{S},$$

и ток в каждом проводнике

$$I = \frac{U}{R} = \frac{US}{2\rho_0 L}$$

Теперь найдем сопротивление проводников от одного и от второго конца до середины. Находя из того же графика площадь под прямой от $x = 0$ до $x = L/2$, получим

$$R_{0-L/2} = \frac{3\rho_0 L}{4S}$$

Аналогично

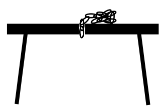
$$R_{L-L/2} = \frac{5\rho_0 L}{4S}$$

Пусть потенциал левого соединения проводников равен нулю. Тогда потенциалы точек 1 и 2 равны

$$\varphi_1 = IR_{0-L/2} = \frac{3I\rho_0 L}{4S} = \frac{3U}{8}; \qquad \varphi_2 = IR_{L-L/2} = \frac{5I\rho_0 L}{4S} = \frac{5U}{8}$$

Поэтому

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{U}{4}$$



5. В центре горизонтального гладкого стола, расположенного на высоте h от пола сделано отверстие. Около отверстия лежит свернутая в бухту цепочка с мелкими звеньями длиной $l = h$. Один конец цепочки тихонько сталкивают в отверстие, и цепочка начинает падать. Через какое время цепочка коснется пола? Ответ обосновать.

Решение. Пока часть цепочки лежит на столе, ее ускорение не будет равно ускорению свободного падения, поскольку движущимся частям приходится вовлекать в движение покоящиеся звенья, а для этого нужна сила. И, следовательно, со стороны лежащих звеньев на падающие такая же сила действует, что приводит к тому, что ускорение цепочки не равно ускорению свободного падения.

Пусть скорость цепочки в некоторый момент v. Тогда за время Δt начнет двигаться кусочек длиной $v\Delta t$. Изменение его импульса составит $\Delta p = \Delta m v = \lambda v^2 \Delta t$ (λ - масса единицы длины цепочки). Для этого нужна сила

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \lambda v^2,$$

действующая со стороны падающих звеньев на покоящиеся. Точно такая же сила (по третьему закону Ньютона) действует со стороны покоящихся звеньев на падающие. Поэтому второй закон Ньютона для падающей части цепочки дает

$$\lambda xa = \lambda xg - \lambda v^2$$

где x - длина свисающего конца. Отсюда находим

$$a = g - \frac{v^2}{x} \qquad (*)$$

Итак, ускорение цепочки и координата ее конца связаны соотношением (*). Поскольку координата конца и его ускорение связаны (ускорение – вторая производная по времени от координаты), такая связь (которая называется в математике дифференциальным уравнением) позволяет найти координату как функцию времени. Можно проверить, что уравнению (*) удовлетворяет зависимость координаты от времени, характерная для равноускоренного движения. Действительно, если $a = const,\ v_0 = 0$, то

$$v = at, \quad x = \frac{at^2}{2}$$

Тогда

$$g - \frac{v^2}{x} = g - \frac{2(at)^2}{at^2} = a \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{g}{3}$$

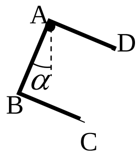
Следовательно, движение равноускоренное с ускорением $g/3$! Отсюда находим время, за которое конец цепочки достигнет земли

$$t = \sqrt{\frac{6h}{g}}$$

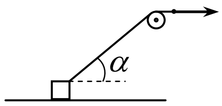
2.10. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс (Димитровград, Липецк, Тамбов, Волгодонск)

1.. В сосуде было $\nu = 10$ моль газа XY_2 при температуре $T_1 = 300$ К и давлении $p_1 = 2,5 \cdot 10^5$ Па. В сосуд ввели катализатор, началась химическая реакция $XY_2 \rightleftarrows X + 2Y$; вещества X и Y - газы. После установления равновесия давление смеси равно $p_2 = 2p_1$ при температуре $T_2 = 360$ К. Какое количество вещества XY_2 прореагировало? Газы идеальные.

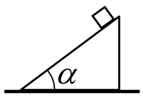
2. Из четырех стержней массами $3m$, $4m$, $3m$ и $4m$ сделали квадрат ABCD так, что стержни с одинаковыми массами расположены друг напротив друга. Затем один из стержней (CD с массой $4m$) удалили, а оставшуюся часть повесили на вбитый в стену гвоздь. Найти угол α между стороной AB и вертикалью.



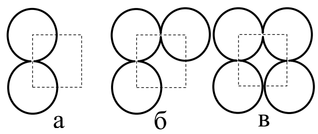
3. К телу, находящемуся на гладкой горизонтальной поверхности, прикреплена нерастяжимая нить, переброшенная через блок (см. рисунок). Угол между нитью и горизонтом равен α, после блока нить горизонтальна. Какое ускорение нужно сообщить концу нити, чтобы груз сразу же оторвался от поверхности?



4. На вершину клина массой M, одна грань которого наклонена под углом α, а вторая перпендикулярна горизонтальной поверхности, кладут маленькое тело (см. рисунок). Коэффициент трения между телом и клином равен k, трение между клином и поверхностью таково, что клин не скользит по поверхности. Возможно ли опрокидывание клина? При какой массе тела? При каком коэффициенте трения?



5. Индуктивность контура, состоящего из двух колец, центры которых расположены в соседних вершинах квадрата (рис. а), равна L_1. Индуктивность контура, состоящего из трех таких же колец, центры которых расположены в трех вершинах квадрата (рис. б), равна L_2. Найти индуктивность контура, состоящего из четырех таких же колец, центры которых расположены в четырех вершинах квадрата (рис. в). Кольца соединены так, как показано на рисунках.



Ответы и решения

1.. В сосуде находилось $\nu = 10$ моль газа XY_2 при температуре $T_1 = 300$ К и давлении $p_1 = 2,5 \cdot 10^5$ Па. В сосуд ввели катализатор, началась химическая реакция $XY_2 \rightleftarrows X + 2Y$; вещества X и Y - газы. После установления равновесия давление смеси достигло значения $p_2 = 2p_1$ при температуре $T_2 = 360$ К. Какое количество вещества XY_2 прореагировало? Все газы идеальные.

Решение. До реакции для газа в сосуде имеем согласно закону Клапейрона-Менделеева

$$p_1 V = \nu R T_1$$

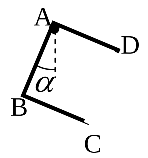
где V - объем сосуда. Пусть прореагировало ν_1 молей газа XY_2. Тогда в сосуде будут находиться $\nu - \nu_1$ молей газа XY_2 и $3\nu_1$ газов X и Y (согласно уравнению реакции из каждой молекулы XY_2 получается 3 молекулы газов X и Y). Поэтому всего в сосуде будет находиться $\nu + 2\nu_1$ молекул. Из закона Дальтона имеем

$$p_2 V = (\nu + 2\nu_1) R T_2$$

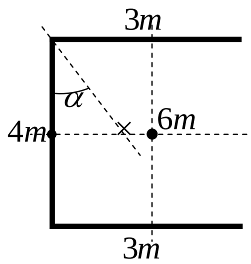
Деля эти уравнения друг на друга, и используя соотношения давления и температуры, данные в условии, найдем

$$\nu_1 = \frac{2T_1 - T_2}{2T_2}\nu = \frac{1}{3}\nu = 3,33$$

2. Из четырех стержней массами $3m$, $4m$, $3m$ и $4m$ сделали квадрат ABCD так, что стержни с одинаковыми массами расположены друг напротив друга. Затем один из стержней (CD с массой $4m$) удалили, а оставшуюся часть повесили на вбитый в стену гвоздь (см. рисунок). Найти угол между стороной AB и вертикалью.

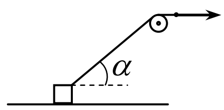


Решение. Фигура расположится так, что ее центр тяжести будет находиться точно под точкой A. Найдем ее центр тяжести. Центр тяжести двух отрезков массой $3m$ лежит в центре квадрата. Поэтому центр тяжести треугольника без одной стороны массой $4m$ можно найти как центр тяжести двух материальных точек массой $4m$ и $6m$, первая из которых лежит в центре стороны с массой $4m$, а вторая – в центре квадрата (на рисунке центр тяжести показан крестиком). Причем расстояние от центра стороны с массой $4m$ до центра тяжести в 6/4=3/2 раза больше, чем расстояние от центра квадрата до центра тяжести. Поэтому расстояние от центра стороны с массой $4m$ до центра тяжести фигуры равно $3a/10$ (a - сторона квадрата). Отсюда находим, что



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(3a/10)}{(a/2)} = \frac{3}{5} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{5}\right)$$

3. К телу, находящемуся на гладкой горизонтальной поверхности, прикреплена нерастяжимая нить, переброшенная через блок (см. рисунок). Угол между нитью и горизонтом равен α, после блока нить горизонтальна. Какое ускорение нужно сообщить концу нити, чтобы груз сразу же оторвался от поверхности?



Решение. Очевидно ускорение конца нити a и ускорение тела a_1 (направленное горизонтально при условии его неотрыва от поверхности) связаны соотношением

$$a_1 = \frac{a}{\cos\alpha}$$

Чтобы сообщить телу такое ускорение сила натяжения нити должна быть равна

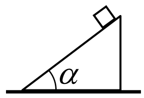
$$T\cos\alpha = \frac{ma}{\cos\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{ma}{\cos^2\alpha}$$

Если при этом для вертикальной составляющей силы натяжения выполнено условие

$$T\sin\alpha \ge mg$$

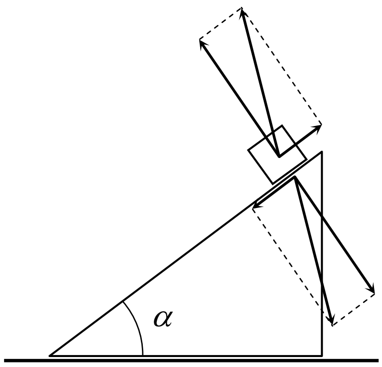
то тело оторвется от поверхности. Отсюда

$$\frac{ma\sin\alpha}{\cos^2\alpha} \ge mg \qquad \Rightarrow \qquad a \ge \frac{g\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$$



4. На вершину клина, одна грань которого наклонена под углом α, а вторая перпендикулярна горизонтальной поверхности, кладут маленькое тело массой m (см. рисунок). Коэффициент трения между телом и клином равен k, трение между клином и поверхностью таково, что клин не скользит по поверхности. Возможно ли опрокидывание клина? При какой массе клина? При каком коэффициенте трения?

Решение. Если коэффициент трения таков, что тело покоится на наклонной грани клина ($k > \mathrm{tg}\,\alpha$), то клин не может опрокинуться. Действительно, в этом случае сила, действующая на тело со стороны клина, направлена вертикально вверх и равна по величине силе тяжести тела (тело покоится!). Поэтому сила, действующая на клин со стороны тела, направлена вертикально вниз и не может опрокинуть прямоугольный клин. Если же тело движется с ускорением, направленным вниз вдоль плоскости, то ситуация другая. В этом случае нормальная компонента силы реакции плоскости равна $mg\cos\alpha$ (m - масса тела), а компонента силы реакции, направленная вдоль плоскости (сила трения) меньше, чем $mg\sin\alpha$. А это значит, что суммарная сила, действующая на тело со стороны клина, направлена левее вертикали (см. рисунок), а на клин со стороны тела (противоположная и равная по величине первой силе) – правее. Следовательно, эта сила может опрокинуть клин.



Найдем «границу» опрокидывания клина через вершину прямого угла. В момент опрокидывания сила реакции будет сосредоточена в вершине, поэтому для опрокидывания клина момент суммарной силы, действующей на клин со стороны тела (сила реакции + трения), должен стать больше момента силы тяжести (относительно вершины прямого угла). Пусть ширина нижней грани клина равна a. Тогда момент силы тяжести относительно вершины прямого угла равен

$$M_{mg} = \frac{1}{3}Mga$$

Момент суммарной силы, действующей на клин со стороны тела, можно вычислить отдельно для сил реакции и трения, а затем сложить. Имеем

$$M_{mp} = kmg\cos\alpha \cdot a\sin\alpha$$

где $a\sin\alpha$ - плечо силы трения относительно вершины прямого угла. Аналогично для момента силы реакции имеем

$$M_{реак} = -mg\cos\alpha \cdot a\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = -mga\sin^2\alpha$$

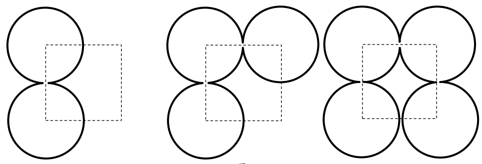
где $a\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$ - плечо силы реакции относительно вершины прямого угла (знак «-» - потому что сила реакции «вращает» клин по часовой стрелке относительно вершины прямого угла). Отсюда заключаем, что клин перевернется, если

$$mga\sin^2\alpha \geq kmga\sin\alpha\cos\alpha + \frac{1}{3}Mga$$

Или

$$m \geq \frac{M}{3\sin\alpha\left(\sin\alpha - k\cos\alpha\right)}$$

5. Индуктивность контура, состоящего из двух одинаковых колец, центры которых расположены в соседних вершинах квадрата (рис. а), равна L_1. Индуктивность контура, состоящего из трех таких же колец, центры которых расположены в трех вершинах квадрата (рис. б), равна L_2. Найти индуктивность контура, состоящего из четырех таких же колец, центры которых расположены в четырех вершинах квадрата (рис. в). Кольца соединены так, как показано на рисунках.



Решение. Поток магнитного поля тока в контуре через сам этот контур в случае а складывается из двух потоков поля тока в кольце через само это кольцо Φ_{11} и двух потоков поля тока кольца через соседнее кольцо Φ_{12}. Поэтому

$$L_1 I = 2\Phi_{11} + 2\Phi_{12}$$

где I - ток в кольце. Поток поля тока в контуре через сам контур во втором случае складывается из трех потоков поля кольца через само кольцо Φ_{11}, четырех потоков поля тока кольца через соседнее кольцо Φ_{12}, и двух потоков поля кольца через кольцо, находящееся в противоположной вершине квадрата Φ_{13}

$$L_2 I = 3\Phi_{11} + 4\Phi_{12} + \Phi_{13}$$

Аналогично в третьем случае

$$L_3 I = 4\Phi_{11} + 8\Phi_{12} + 4\Phi_{13}$$

Из первого уравнения находим $\Phi_{11} = \dfrac{L_1 I}{2} - \Phi_{12}$. Подставляя это значение во второе и третье уравнение, получим

$$\left(L_2 - \frac{3}{2}L_1\right)I = \Phi_{12} + \Phi_{13}$$

$$\frac{\left(L_3 - 2L_1\right)}{4}I = \Phi_{12} + \Phi_{13}$$

Отсюда находим $L_3 = 4\left(L_2 - L_1\right)$