2.12. Отборочный тур олимпиады «Росатом», 9 класс

Ответы и решения

1. Поскольку в условии не сказано, как направлены силы, то, очевидно, существует четыре варианта удерживания тел под водой и, соответственно, четыре тела с разными плотностями (см. рисунок). Для самого тяжелого тела (которое нужно удерживать силой $\vec{F}_2$, направленной вверх) условие равновесия дает

$$mg = F_2 + F_A \qquad \Rightarrow \qquad \rho V g = F_2 + \rho_в V g \qquad \Rightarrow \qquad (\rho - \rho_в) V g = F_2$$

где m - масса самого тяжелого тела, F_A - действующая на него в толще воды выталкивающая сила Архимеда, V - объем тел, $\rho_в$ - плотность воды. Отсюда находим объем тел

$$V = \frac{F_2}{(\rho - \rho_в) g} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Записывая теперь условия равновесия для остальных тел, найдем

$$\rho_1 gV = F_1 + \rho_в gV \qquad \Rightarrow \qquad \rho_1 = \frac{F_1}{gV} + \rho_в = 1200 \text{ кг/м}^3$$

$$\rho_2 gV = \rho_в gV - F_1 \qquad \Rightarrow \qquad \rho_2 = \rho_в - \frac{F_1}{gV} = 800 \text{ кг/м}^3$$

$$\rho_3 gV = \rho_в gV - F_3 \qquad \Rightarrow \qquad \rho_3 = \rho_в - \frac{F_2}{gV} = 600 \text{ кг/м}^3$$

Итак, всего тел – четыре, их плотности

$$\rho = 1400 \text{ кг/м}^3,\ \rho_1 = 1200 \text{ кг/м}^3,\ \rho_2 = 800 \text{ кг/м}^3,\ \rho_3 = 600 \text{ кг/м}^3.$$

2. Пусть за какое-то время израсходовано топливо массой m с удельной теплотой сгорания λ, а использовано количество теплоты Q ($Q < \lambda m$). Тогда результаты измерения КПД нагревателя дадут

$$\eta_1 = \frac{Q}{\lambda m} \tag{*}$$

С другой стороны, поскольку часть топлива терялась, использованная теплота составляет долю η_2 от той части топлива, которая осталась после потерь, где η_2 - настоящий КПД нагревателя

$$Q = \eta_2 \lambda (1-\delta) m \tag{**}$$

Подставляя (*) в (**), найдем

$$\eta_2 = \frac{\eta_1}{1-\eta} = \frac{\eta_1}{0,95} = 84\ \%$$

3. Интересно, что в условии задачи вообще не заданы никакие величины. Это значит, что отношение ускорений должно определяться числами порядка единицы: может быть единицами, двойками (или ее степенями), числом π или их комбинациями.

Пусть радиус окружности - R, скорость Матроскина - v, ускорение Шарика - a. Тогда из условия одновременного прихода Матроскина и Шарика в точку В имеем

$$\pi R = vt$$
$$2R = 2vt - \frac{at^2}{2} \tag{*}$$

(ускорение Шарика, очевидно, должно быть направлено противоположно его движению). Выражая время из первого уравнения и подставляя его во второе, получим

$$2(\pi - 1) = \frac{a}{2}\frac{\pi^2 R}{v^2}$$

Поскольку ускорение Матроскина есть v^2 / R, то из этой формулы находим отношение ускорений Матроскина и Шарика

$$\frac{a_М}{a_Ш} = \frac{v^2}{Ra} = \frac{\pi^2}{4(\pi - 1)} = 1,15$$

4. Пусть скорость эскалатора u, его длина L. Тогда в первом случае Вовочка движется со скоростью $v-u$, во втором – со скоростью v и проходит расстояние L. Поэтому для первого и второго случаев получаем

$$\frac{L}{v+u}+\Delta t_1=\frac{L}{v-u}$$
$$\frac{L}{v+u}+\Delta t_2=\frac{L}{v}$$

Или

$$\frac{\Delta t_1}{L}=\frac{2u}{(v+u)(v-u)}$$
$$\frac{\Delta t_2}{L}=\frac{u}{(v+u)v}$$

Деля уравнения друг на друга, получим

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=\frac{2v}{v-u}$$

Откуда найдем

$$u=\frac{v(\Delta t_1-2\Delta t_2)}{\Delta t_1}=5 \text{ км/час}$$

5. Чтобы доска начала двигаться сила F должна превысить максимальную силу трения между доской и полом $F_{mp,1}$, максимальную силу трения между доской и телом $F_{mp,2}$ и силу натяжения нити T

$$F \geq F_{mp,1}+F_{mp,2}+T \qquad (*)$$

Чтобы тело начало двигаться сила натяжения нити должна превысить максимальную силу трения между телом и доской $F_{mp,2}$

$$T \geq F_{mp,2} \qquad (**)$$

Подставляя силу натяжения из (**) в (*) и используя закон Кулона-Амонтона для максимальных сил трения, получим

$$F \geq F_{mp,1}+2F_{mp,2}=5kmg+2kmg=7kmg$$