2.1. Олимпиада им. И.В.Савельева (отборочный тур олимпиады «Росатом»), 11 класс

Ответы и решения

1. По закону сохранения механической энергии находим

$$\frac{Mv_0^2}{2}=\frac{kS^2}{2}$$

где M - масса самолета, k - жесткость каната торможения. Отсюда

$$k=\frac{Mv_0^2}{S^2}$$

Максимальным вес летчика будет при максимальном ускорении самолета, которое будет при максимальном удлинении каната. Используя закон Гука, находим максимальное ускорение самолета (и летчика внутри него; для летчика это ускорение будет создаваться силами натяжения ремней безопасности)

$$a = \frac{v_0^2}{S}$$

Учитывая, действующую на летчика силу тяжести, находим его максимальный вес

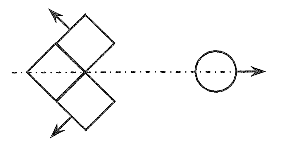
$$P = \sqrt{m^2g^2 + m^2a^2} = m\sqrt{g^2 + (v_0^4 / S^2)} = 1440 \ \ (1471\ ?)\ \text{Н}$$

2. В момент удара шайба будет взаимодействовать с двумя крайними кубиками. Поскольку трение отсутствует, каждый кубик может «чувствовать» только составляющую скорости, перпендикулярную его поверхности. Вторая составляющая скорости будет меняться при взаимодействии шайбы с другим кубиком, а сам кубик может приобрести скорость, направленную перпендикулярно его поверхности. Чтобы найти скорости двух крайних кубиков и шайбы после удара запишем законы сохранения энергии и импульса

$$(m/2)v_\perp = (m/2)v_{\perp,1} + mv_1$$
$$\frac{(m/2)v_\perp^2}{2} = \frac{(m/2)v_{\perp,1}^2}{2} + \frac{mv_1^2}{2}$$

где $v_\perp = v/\sqrt{2}$ и $v_{\perp,1}$ - составляющие скорости шайбы, перпендикулярные поверхности кубика до и после удара, v_1 - скорость кубика после удара. Из законов сохранения находим

$$v_{\perp,1} = -\frac{v_\perp}{3}, \quad v_1 = \frac{2v_\perp}{3}$$



Т.е. после удара составляющая скорости шайбы, перпендикулярная поверхности кубика, меняет направление и уменьшается втрое, кубик приобретает скорость, равную двум третям составляющей скорости шайбы до удара. Для второго крайнего кубика будут выполнены те же соотношения, поэтому он приобретет такую же скорость, как и первый кубик. Это означает, что после удара крайние кубики будут двигаться под углом $45°$ к направлению начальной скорости шайбы со скоростями

$$v_1 = \frac{2v_\perp}{3} = \frac{\sqrt{2}v}{3}$$

Шайба будет двигаться назад со скоростью $v/3$, центральный кубик останется стоять на месте.

3. Из данных условия находим угловые скорости вращения планеты вокруг своей оси $\omega_П$, вокруг звезды $\omega_З$ и спутника вокруг планеты ω_C:

$$\omega_П = \frac{2\pi}{T}, \qquad \omega_З = \frac{2\pi}{10T}, \qquad \omega_C = \frac{2\pi}{4T}$$

В системе отсчета, вращающейся вместе с планетой, угловые скорости звезды и спутника равны

$$\omega'_З = \omega_П - \omega_З = \frac{18\pi}{10T}, \qquad \omega'_C = \omega_П - \omega_C = \frac{6\pi}{4T} \qquad (*)$$

Затмение будет повторяться в той же точке планеты через время t, если одновременно выполнены уравнения

$$2\pi k = \omega_3' t, \qquad 2\pi n = \omega_C' t, \qquad (**)$$

где k и n - целые числа. Подставляя в систему (**) относительные угловые скорости звезды и спутника, подбором находим целые решения k и n. Минимальными решениями (которые определяют ближайшее затмение) являются числа

$$k = 6, \qquad n = 5.$$

Теперь из любого уравнения системы можно найти минимальное время между затмениями

$$t = \frac{10}{3}T. \ (20/3\ ?)$$

4. Работу газа за цикл находим как площадь фигуры, ограниченной графиком процесса в координатах $p-V$. Очевидно, эту площадь можно найти как разность удвоенной площади сектора, опирающегося на четверть окружности радиуса p по одной оси и V по другой, и прямоугольника, в который вписан цикл (со сторонами p и V)

$$A = 2\cdot\frac{\pi pV}{4} - pV = \frac{(\pi-2)pV}{2}$$

Чтобы найти количество теплоты, полученное газом от нагревателя, применяем к процессу расширения газа $1 \to 2$ (а именно в этом процессе газ получает тепло) первый закон термодинамики

$$Q = \frac{3}{2}R\Delta T_{1\to2} + A_{1\to2}$$

где $\Delta T_{1\to2}$ - изменение температуры газа в процессе $1\to2$, $A_{1\to2}$ - работа газа в этом процессе. Используя далее закон Клапейрона-Менделеева и находя работу газа $A_{1\to2}$ как площадь под графиком этого процесса, получим

$$Q = \frac{(22+\pi)pV}{4}$$

Отсюда находим КПД цикла

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{2(\pi-2)}{\pi+22} = 0{,}091$$

5. Мысленно разобьем сплошной заряженный параллелепипед на тонкие слои толщиной Δa без «верхней» грани (из-за того, что высота параллелепипеда вдвое меньше двух других размеров, это можно сделать, причем слои будут иметь всюду одинаковую толщину). Заряд такого слоя представляющего тонкостенный параллелепипед с размерами $x \times x \times x/2$ находится из очевидных соотношений (у такой коробки есть четыре боковых стенки с площадью $x^2/2$ и дно с площадью x^2)

$$\Delta q = \rho\Delta V = \rho\left(4x(x/2)\Delta a + x^2\Delta a\right) = 3\rho x^2\Delta a$$

А поскольку площадь поверхности слоя равна $4x(x/2)+x^2 = 3x^2$, то поверхностная плотность заряда каждого слоя определяется соотношением

$$\sigma = \rho\Delta a. \qquad (*)$$

Очевидно, что поле каждого слоя в т. А одинаково и по величине и по направлению. Действительно, при изменении размеров слоя изменятся расстояния от каждого его элемента до точки А, но изменятся и их заряды из-за изменения площади элемента, что компенсирует согласно закону Кулона изменение расстояний. Поэтому поле E «целого» заряженного параллелепипеда в т. А так связано с полем одного тонкостенного параллелепипеда в этой точке ΔE: $E = N\Delta E$, где $N = a/2\Delta a$ - количество слоев, на который разбит «целый» параллелепипед. С другой стороны, из (*) имеем

$$N = \frac{a}{2\Delta a} = \frac{a\rho}{2\sigma}$$

Отсюда находим поле любого (и в частности, того, о котором говорится в условии) слоя

$$\Delta E = \frac{E}{N} = \frac{2\sigma}{\rho a} E$$

2.3. Олимпиада им. академика И.В.Курчатова (отборочный тур олимпиады «Росатом»), 11 класс

Ответы и решения

1. Очевидно, что в первом случае сила, с которой сосуд действует на чашу весов, равна сумме сил тяжести стакана, воды и груза. Действительно, поскольку все тела (стакан, вода и тело) находятся в покое, то сумма внешних сил, действующая на систему тел должна быть равна нулю. Внешними являются сумма сил тяжести и сила реакции со стороны чаши весов, которая, следовательно, и равна сумме сил тяжести стакана, воды и груза

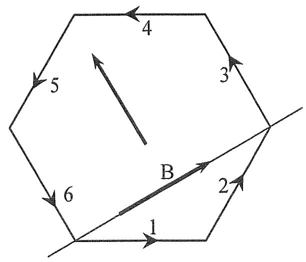
$$F_1 = (8m+m)g = 9mg$$

где $8m$ - масса стакана с водой, m - масса тела. Во втором случае возникает еще одна внешняя сила – сила реакции стержня, направленная вниз. Эта сила равна разности силы Архимеда и силы тяжести тела. Поскольку плотность тела вдвое меньше плотности жидкости, то сила Архимеда, действующая на тело при его полном погружении в жидкость, вдвое превосходит силу тяжести. Поэтому

$$F_3 = 9mg + (2mg - mg) = 10mg$$

Поэтому $F_1 : F_2 = 9:10$. Таким же будет и отношение масс грузов, которые нужно положить на вторую чашу весов в этих случаях.

2. Со стороны однородного магнитного поля на проводник с током действует сила Ампера, равная



$$F = BIl\sin\alpha$$

где B - индукция магнитного поля, I - ток в проводнике, l - его длина, α - угол между проводником и индукцией. Чтобы силы, действующие со стороны поля на стороны 1 и 2, были равны по величине, возможны два варианта направления индукции магнитного поля (см. рисунок). При этом в одном случае угол между индукцией и сторонами 1 и 2 равен $30°$, а между индукцией и стороной 3 - $90°$. Поэтому сила Ампера, действующая на сторону 3, равна

$$F_3 = BIl\sin 30°\frac{\sin 90°}{\sin 30°} = 2F$$

Во втором случае $F_3 = 0$. Итак, возможны два ответа: $F_3 = 2F$ и $F_3 = 0$.

3. Первый пассажир сразу будет двигаться вниз, второй – начнет двигаться вверх (относительно земли), затем повернет и будет двигаться вниз. Очевидно, время задержки спуска второго пассажира по сравнению с первым равно тому времени, через которое второй окажется снова в той точке (в системе отсчета, связанной с землей), откуда они начали движение. Действительно, второй пассажир, находясь в ней, будет в этот момент иметь такую же скорость относительно земли и ускорение, что и первый, и, следовательно, в точности повторит движение первого. А время возвращения в ту же точку можно найти так же, как и время возвращения на землю тела, брошенного вертикально вверх

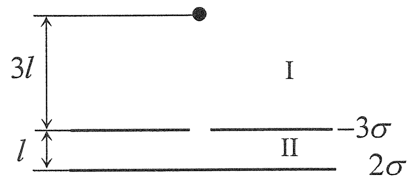
$$\Delta t = \frac{2v_0}{a}$$

Отсюда

$$v_0 = \frac{a\Delta t}{2}$$

4. Электрическое поле в любой точке пространства создается зарядами обеих пластин. По принципу суперпозиции находим напряженность поля в областях I и II

В области I: $E_I = \frac{3\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{2\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, направлено к верхней пластине (вниз на рисунке).



В области II: $E_{II} = \frac{3\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{2\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{5\sigma}{2\varepsilon_0}$, направлено к верхней пластине (вверх на рисунке).

Поэтому работа поля над положительным зарядом q при его движении до нижней пластины равна

$$A = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}3l - \frac{q5\sigma}{2\varepsilon_0}l = -\frac{q\sigma l}{\varepsilon_0} < 0 \qquad (*)$$

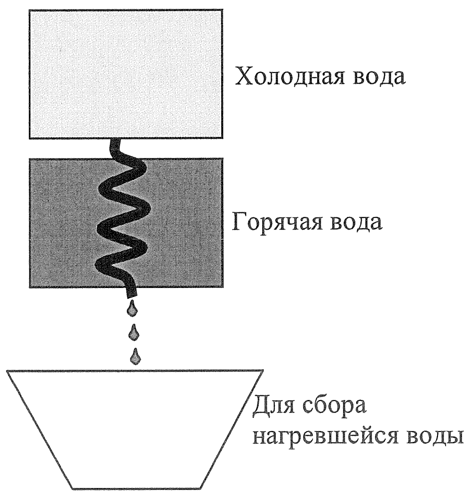
Поскольку работа (*) отрицательна, заряд q не достигнет нижней пластины. Точку его остановки найдем по теореме об изменении кинетической энергии - при нулевой начальной и конечной скорости заряда работа поля до точки остановки равна нулю:

$$0 = A = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}3l - \frac{q5\sigma}{2\varepsilon_0}(l - x) \qquad (**)$$

где x - расстояние от точки остановки до нижней пластины. Из (**) находим

$$x = \frac{2l}{5}$$

5. Если пропускать холодную жидкость небольшими порциями по трубке, проходящей через горячую жидкость (по «змеевику», см. рисунок), то горячая охладится сильнее, чем при контакте всей массы горячей и холодной жидкостей. Это связано с тем, что горячая жидкость будет всегда контактировать с холодной, а отдача тепла пропорциональна разности температур. Найдем температуру, до которой охладилась в этом случае горячая жидкость. Пусть каждая порция холодной жидкости, проходящая через змеевик, имеет массу Δm, масса и холодной и горячей воды m ($\Delta m / m = N$; максимальному нагреву холодной воды отвечает $N \to \infty$). Найдем, на сколько охладилась горячая жидкость.



Уравнение теплового баланса при пропускании первой порции жидкости имеет вид

$$c\Delta m(T_1 - T_x) = cm(T_г - T_1)$$

где T_x, $T_г$ и T_1 - исходные температуры горячей и холодной жидкости и температура, которую будет иметь первая порция холодной жидкости и горячая жидкость после теплового контакта, c - удельная теплоемкость жидкостей (по условию – одинаковая). Отсюда найдем

$$T_1 = \frac{N}{1+N}T_г + \frac{1}{1+N}T_x \qquad (*)$$

где $N = \dfrac{\Delta m}{m}$ - количество порций холодной жидкости, которые пропускались по змеевику через горячую. Температуру горячей жидкости после пропускания через нее второй порции холодной T_2 можно найти по формуле (*), если в ней сделать замену $T_г \to T_1$

$$T_2 = \frac{N}{1+N}\left(\frac{N}{1+N}T_г + \frac{1}{1+N}T_x\right) + \frac{1}{1+N}T_x = \left(\frac{N}{1+N}\right)^2 T_г + \left(\frac{1}{1+N} + \frac{N}{(1+N)^2}\right)T_x \qquad (*)$$

Очевидно, что после сообщения N -ой порции температура горячей жидкости может быть найдена по формуле

$$T_N = \left(\frac{N}{1+N}\right)^N T_г + \left(\frac{1}{1+N} + \frac{N}{(1+N)^2} + \ldots + \frac{N^{N-1}}{(1+N)^N}\right)T_x \qquad (**)$$

При $N \to \infty$ первое слагаемое даст

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{N}\right)^N}T_г = \frac{T_г}{e},$$

где $e \approx 2,71$ - основание натуральных логарифмов. Второе слагаемое (**) сводится к сумме конечной геометрической прогрессии со знаменателем $\dfrac{N}{1+N}$:

$$\frac{1}{1+N}\left(1 + \frac{N}{N+1} + \left(\frac{N}{N+1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{N}{N+1}\right)^{N-1}\right)T_x =$$

Используя формулу для суммы $N-1$ членов геометрической прогрессии, получим

$$= \frac{1}{1+N}\frac{1-\left(\frac{N}{N+1}\right)^{N-1}}{1-\frac{N}{N+1}}T_x = \left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N-1}}\right)T_x \approx \left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N}}\right)T_x = \left(1-\frac{1}{e}\right)T_x \qquad (***)$$

Из (**) и (***) получаем температуру горячей жидкости после пропускания через нее N порций ($N \to \infty$) холодной

$$T_N = \frac{T_г}{e} + \left(1-\frac{1}{e}\right)T_x = \frac{T_г + (e-1)T_x}{e}$$

Температуру холодной жидкости найдем теперь по уравнению теплового баланса, примененного ко всему процессу

$$cm(T - T_x) = cm(T_г - T_N)$$

Отсюда

$$T = \frac{T_г(e-1) + T_x}{e}$$

Для данных условия находим

$$T = 70{,}5^\circ\ \mathrm{C}$$