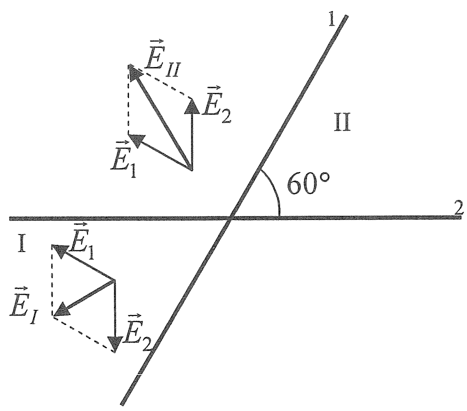
2.4. Очный отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс

Ответы и решения



1. Поле внутри каждой области определяется суммой полей, созданных каждой пластиной. Векторы напряженности поля каждой пластины $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ показаны на рисунке (при условии, что заряды пластин положительны; если они отрицательны, направление всех векторов изменится на противоположное, величины полей при этом не изменятся). Величины полей равны

$$E_1 = E_2 = E = \frac{Q}{2S\varepsilon_0}$$

где Q - заряд пластин, S - площадь. Из рисунка заключаем, что в области I угол между векторами $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ равен $120°$, в области II - $60°$. Поэтому напряженность суммарного поля (векторы показаны на рисунке жирными стрелками) равна:

в области I

$$E_I = E$$

в области II

$$E_{II} = 2E\cos 30° = E\sqrt{3}$$

Поэтому

$$\frac{E_I}{E_{II}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

2. Из законов равноускоренного движения имеем

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{at^2}{2} \\ v_x(t) = at \end{cases} \qquad (*)$$

Подставляя в первую формулу время τ, находим ускорение тела

$$a = \frac{2S}{\tau^2} \qquad (**)$$

Применяя теперь зависимости (*) к точке, лежащей на расстоянии $S/5$ от начальной, получим

$$\begin{cases} \dfrac{S}{5} = \dfrac{at_1^2}{2} \\ v = at_1 \end{cases}$$

где t_1 - время движения до этой точки. Выражая теперь время из первого уравнения, подставляя его во второе и используя ускорение (**), найдем

$$v = \frac{2S}{\sqrt{5}\tau}$$

3. Поскольку поршень движется медленно, то он в любой момент времени находится в равновесии. Поэтому

$$mg = \left(p_н - p_в\right)S \qquad (*)$$

где $p_н$ и $p_в$ - давления газа снизу и сверху от поршня, S - площадь сосуда. Поскольку давления и температуры газов над и под поршнем не изменяются, то не изменяются и концентрации газов. А поскольку изменения объемов верхнего и нижнего отсеков одинаковы по величине, и все молекулы из нижнего отсека переходят в верхний, то концентрации газов над и под поршнем одинаковы. Используя далее основное уравнение МКТ $p = nkT$, где n - концентрация молекул газа, k - постоянная Больцмана, T - абсолютная температура, получим из (*)

$$n = \frac{mg}{kS\left(T_н - T_в\right)} = \frac{mg}{0,2kST} = \frac{5mg}{kST}$$

Теперь из основного уравнения МКТ находим давления

$$p_н = nkT_н = \frac{5mgT_н}{ST} = \frac{6mg}{S}, \qquad p_в = nkT_в = \frac{5mgT_в}{ST} = \frac{5mg}{S}$$

4. Находясь снаружи сфер, заряд $-Q$ будет притягиваться к ним и разгоняться. После влета в отверстие во внешней сфере заряд $-Q$ не будет взаимодействовать с ней, а будет отталкиваться от внутренней сферы и, следовательно, тормозиться. Чтобы понять, долетит ли заряд $-Q$ до поверхности внутренней сферы, найдем разность потенциальных энергий заряда $-Q$ в начальной точке $П_1$ и в точке на поверхности внутренней сферы $П_2$ – если она положительна, заряд $-Q$ долетит до внутренней сферы. Потенциалы начальной точки φ_1 и точки на поверхности внутренней сферы φ_2 найдем по принципу суперпозиции

$$\varphi_1 = \frac{k2Q}{3R} + \frac{k(-Q)}{3R} = \frac{kQ}{3R}, \qquad \varphi_2 = \frac{k2Q}{2R} + \frac{k(-Q)}{R} = 0$$

Поэтому

$$П_1 = (-Q)\varphi_1 = -\frac{kQ^2}{3R}, \qquad П_2 = (-Q)\varphi_2 = 0$$

Отсюда $П_1 - П_2 < 0$, и, следовательно, заряд $-Q$ не долетит до поверхности внутренней сферы.

Точку, в которой заряд $-Q$ остановится, найдем из условия, что работа поля над зарядом при его перемещении до этой точки равна нулю. Имеем

$$0 = \varphi_1 - \varphi_0 = \frac{kQ}{3R} - \left(\frac{k2Q}{2R} + \frac{k(-Q)}{x}\right)$$

где x - расстояние от центра сфер до точки остановки заряда $-Q$, φ_0 - потенциал этой точки. Отсюда находим

$$x = \frac{3R}{2}$$

5. Поскольку в процессе движения тела от одной точки остановки до другой на него действует постоянная сила трения, то такое движение аналогично колебаниям груза на пружине в поле силы тяжести. Другими словами, движение тела от одной точки остановки до другой представляет собой гармоническое колебание с той же частотой, с которой колеблется тело на этой же пружине в отсутствии силы тяжести, а положение равновесия сдвинуто на величину $\mu mg/k$ в направлении действия силы трения (но в течение нескольких полупериодов движение не является гармоническим колебанием из-за изменения направления силы трения). Поэтому зависимость координаты от времени от начального толчка до точки остановки имеет вид

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \qquad (*)$$

где $\omega = \sqrt{k/m}$, а постоянные определяются начальными условиями $x(t=0) = \mu mg/k$, $v_x(t=0) = v_0$. Из начальных условий находим

$$A = \frac{\mu mg}{k}, \qquad B = \frac{v_0}{\omega} \tag{**}$$

Из условия (*) с учетом (**) находим зависимость скорости тела от времени

$$v_x(t) = -\frac{\mu mg}{k}\omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t, \tag{***}$$

Из (***) находим время от толчка до первой остановки

$$tg\,\omega t_1 = \frac{v_0 k}{\mu mg\omega} = \frac{v_0\omega}{\mu g} \qquad t_1 = \frac{1}{\omega} arctg\left(\frac{v_0\omega}{\mu g}\right)$$

А поскольку время движения от одной точки остановки до другой равно полупериоду, то время движения от толчка до второй остановки определяется соотношением

$$\tau = t_1 + \frac{\pi}{\omega} = \frac{1}{\omega} arctg\left(\frac{v_0\omega}{\mu g}\right) + \frac{\pi}{\omega}$$

2.5. Очный отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс

Ответы и решения

1. Очевидно, вектор ускорения тела направлен противоположно начальной скорости. Поэтому законы движения дают

$$l = v_0\tau - \frac{a\tau^2}{2}$$

$$3l = v_0 4\tau - \frac{a(4\tau)^2}{2}$$

Решая систему уравнений, получим

$$v_0 = \frac{13l}{12\tau}$$

2. Пусть скорость эскалатора u, его длина L. Тогда в первом случае Вовочка движется со скоростью $v-u$, во втором – со скоростью v и проходит расстояние L. Поэтому для первого и второго случаев получаем

$$\frac{L}{v+u}+\Delta t_1=\frac{L}{v-u}$$
$$\frac{L}{v+u}+\Delta t_2=\frac{L}{v}$$

Или

$$\frac{\Delta t_1}{L}=\frac{2u}{(v+u)(v-u)}$$
$$\frac{\Delta t_2}{L}=\frac{u}{(v+u)v}$$

Деля уравнения друг на друга, получим

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=\frac{2v}{v-u}$$

Откуда найдем

$$u=\frac{v(\Delta t_1-2\Delta t_2)}{\Delta t_1}=5 \text{ км/час}$$

3. Пусть температура газа T. Сообщим газу малое количество теплоты δQ и найдем его работу (по знаку работы можно понять, как изменяется объем). По первому закону термодинамики имеем

$$\delta A=\delta Q-\Delta U=\frac{3\nu RT\Delta T}{4T_1}-\frac{3\nu R\Delta T}{2}=\frac{3\nu R\Delta T}{2}\left(\frac{T}{2T_1}-1\right) \qquad (*)$$

Из формулы (*) следует, что при $T<2T_1$ и возрастании температуры $\Delta T>0$, работа газа отрицательна, т.е. объем газа при нагревании уменьшается, а при $T<2T_1$ - увеличивается. Следовательно, объем газа минимален при $T=2T_1$.

4. Очевидно, на больших расстояниях от зарядов движущийся заряд отталкивается от них (их суммарный заряд имеет тот же знак), на малых – притягивается (из-за большей близости к заряду $-Q$). Поэтому если движущийся заряд преодолеет точку, в которой отталкивание сменяется притяжением, то он и достигнет заряда $-Q$.

Определим эту точку. Используя закон Кулона, найдем расстояние от точки нулевой силы до заряда $-Q$:

$$\frac{k2Q^2}{(l+x)^2}=\frac{kQ^2}{x^2}, \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{l}{\sqrt{2}-1}=l\left(\sqrt{2}+1\right)$$

где k - постоянная закона Кулона, x - расстояние от заряда $-Q$ до точки нулевой силы. Минимальной скорости на бесконечности, при которой движущийся заряд преодолеет рассматриваемую точку, отвечает его нулевая скорость в ней. Применяя к движению заряда от бесконечно удаленной точки до точки нулевой силы теорему об изменении кинетической энергии, получим

$$0-\frac{mv_0^2}{2}=Q\left(\varphi_\infty-\varphi_x\right) \qquad (*)$$

где v_0 - скорость заряда на бесконечности, φ_∞ и φ_x - потенциал поля закрепленных зарядов в бесконечно удаленной точке и точке нулевой силы. Вычисляя потенциалы на основе принципа суперпозиции, получаем

$$\varphi_\infty=0, \qquad \varphi_x=\frac{k2Q}{l+x}+\frac{k(-Q)}{x}=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2 kQ}{l} \qquad (**)$$

Теперь из (**) с использованием (*) находим

$$v_0=\sqrt{\frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)^2 kQ^2}{ml}}$$

5. Если сообщить скорость только верхней доске, то только она и будет двигаться. Действительно, при ее движении относительно средней доски на среднюю действует максимальная «тормозящая» сила со стороны нижней доски $4\mu mg$, и «разгоняющая» сила со стороны верхней μmg, которой, следовательно, не хватит, чтобы заставить двигаться среднюю доску. На систему средней и нижней досок действует «максимальная» тормозящая» сила со стороны пола $9\mu mg$, и, следовательно и две нижних доски не будут двигаться и вместе. Поэтому все движения прекратятся, когда остановится верхняя доска, т.е. через время

$$\tau=\frac{v_0}{\mu g}. \qquad (*)$$

Если ударить по нижней доске, то движения в системе будут такими. Сначала будут двигаться все три доски друг относительно друга. Действительно, со стороны нижней на среднюю будет действовать «разгоняющая» сила $4\mu mg$, и тормозящая со стороны верхней - μmg, которой, следовательно, не хватит, чтобы помешать средней доске двигаться. Со стороны средней доски на верхнюю будет действовать «разгоняющая» сила μmg, и, следовательно, верхняя будет также разгоняться, но с меньшим ускорением, чем средняя.

Нижняя доска будет тормозить с ускорением $a_1=13\mu g$, средняя разгоняться с ускорением $a_2=3\mu g$, верхняя – разгоняться с ускорением $a_3=\mu g$. Скорости нижней и средней досок сравняются через время Δt_1, через которое

$$v_0-13\mu g\Delta t_1=3\mu g\Delta t_1$$

т.е. через время

$$\Delta t_1=\frac{v_0}{16\mu g} \qquad (**)$$

В этот момент средняя и нижняя доски будут иметь скорость

$$v_1 = 3\mu g\Delta t_1 = \frac{3v_0}{16},$$

А верхняя – скорость

$$v_2 = \mu g\Delta t_1 = \frac{v_0}{16}$$

Затем нижняя и средняя доски будут тормозить вместе, верхняя – разгоняться. Действительно, максимальные силы трения могут сообщить нижней доске ускорение $a_4 = 5\mu g$, когда нижняя сила трения направлена назад, верхняя – вперед. В этом случае для средней доски, нижняя и верхняя силы трения являются тормозящими и сообщают ей такое же ускорение, поэтому нижняя и средняя доски движутся вместе с ускорением $a_4 = 5\mu g$. Верхняя продолжает разгоняться с ускорением $a_3 = \mu g$. Скорости всех трех досок сравнятся через такое время Δt_2 (после того как сравнялись скорости средней и нижней), что

$$v_1 - 5\mu g\Delta t_2 = v_2 + \mu g\Delta t_2$$

или

$$\Delta t_2 = \frac{v_0}{48\mu g}$$

причем скорости досок в этот момент будут равны

$$v_3 = \frac{v_0}{12}$$

После этого верхняя доска «вырвется» вперед, поскольку она будет тормозиться силой μmg, и следовательно, иметь ускорение $a_5 = \mu g$. Средняя – тормозиться силой $4\mu mg - \mu mg = 3\mu mg$. Ее ускорение будет равно $a_6 = 3\mu g$. Нижняя доска будет тормозиться силой $9\mu mg - 4mg = 5\mu mg$, и двигаться с ускорением $a_7 = 5\mu g$. Поэтому сначала остановится нижняя доска, затем средняя, затем верхняя. Поэтому все движения в системе прекратятся, когда остановится верхняя доска. Это произойдет через такое время Δt_3 после того как сравняются скорости всех досок, что

$$v_3 - \mu g\Delta t_3 = 0$$

или

$$\Delta t_3 = \frac{v_0}{12\mu g} \qquad (***)$$

Складывая времена (*), (**) и (***), получим

$$\tau_1 = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 = \frac{v_0}{6\mu g}$$