2.6. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс (Москва, Балаково, Димитровград, Липецк, Нижний Новгород, Новоуральск, Волгодонск, Байконур, Железногорск, Зеленогорск)

Ответы и решения

1. Пусть расстояние АВ равно x. Тогда, очевидно, что сумма расстояний, пройденных машинами до первой встречи, равно x, а до второй встречи - $3x$. Действительно, до второй встречи каждая машина доедет до второго города (в сумме $2x$), и проедет расстояние от него до места встречи другой машиной. Поэтому, с одной стороны, машина, выехавшая из города А, пройдет до второй встречи расстояние $3l$, с другой это расстояние равно расстоянию между городами плюс расстоянию от города В до точки второй встречи. Отсюда

$$3l = x + \frac{3l}{4}$$

или

$$x = \frac{9l}{4}$$

2. Найдем ускорение тела как функцию координаты. Для этого продифференцируем функцию $v_x = \alpha\sqrt{x}$ по времени:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\alpha}{2\sqrt{x}}\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha}{2\sqrt{x}}v_x = \frac{\alpha^2}{2v_x}v_x = \frac{\alpha^2}{2}$$

Отсюда видим, что движение тела равноускоренное, с нулевой начальной скоростью из точки с координатой $x = 0$ и с ускорением

$$a = \frac{\alpha^2}{2}.$$

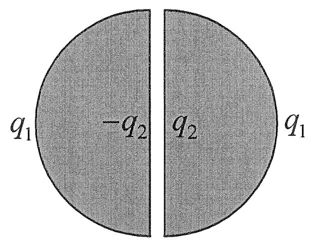
Поэтому зависимость координаты тела от времени имеет вид

$$x = \frac{\alpha^2 t^2}{4},$$

Откуда находим искомое время

$$t = \frac{2\sqrt{x_0}}{\alpha}.$$

3. Заряды распределяться по поверхности полушаров так, чтобы поле внутри них было равным нулю. Для этого (а) на сферических поверхностях должны разместиться одинаковые заряды, (б) на поверхностях плоских поверхностях разместиться одинаковым по величине и противоположным по знакам зарядам (см. рисунок). Из закона сохранения заряда, получаем для зарядов q_1 и q_2



$$\begin{cases} q_1 - q_2 = -Q \\ q_1 + q_2 = 3Q \end{cases}$$

Откуда находим

$$q_1 = Q, \qquad q_2 = 2Q$$

Поле в зазоре находим как поле двух плоскостей, заряженных равными по величине и противоположными по знаку зарядами

$$E = \frac{q_2}{S\varepsilon_0} = \frac{2Q}{\pi R^2 \varepsilon_0}$$

Направлено поле в зазоре справа налево.

4. Пусть масса каждого поршня m, площадь сечения сосуда S. Тогда условия равновесия поршней в любой момент времени дают

$$p_в = \frac{mg}{S}$$

$$p_н - p_в = \frac{mg}{S} \qquad \Rightarrow \qquad p_н = \frac{2mg}{S}$$

Поэтому закон Клапейрона-Менделеева для газов между поршнями и под нижним поршнем имеет вид

$$p_в 2hS = \nu_1 RT \qquad \Rightarrow \qquad 2mgh = \nu_1 RT$$

$$p_н hS = \nu_2 RT \qquad \Rightarrow \qquad 2mgh = \nu_2 RT$$

где ν_1 и ν_2 - количество вещества газа между поршнями и под нижним поршнем соответственно. Складывая эти уравнения, получим

$$4mgh = \nu RT$$

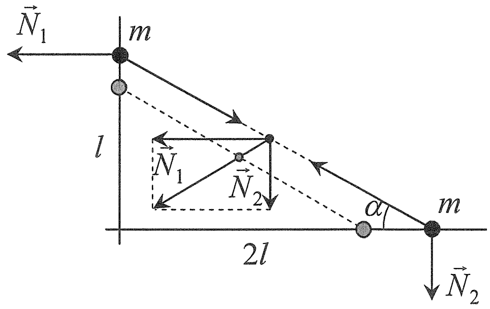
где ν - количество вещества газа в сосуде. С другой стороны, когда нижний поршень будет лежать на дне, условие равновесия верхнего поршня даст

$$mgH = \nu RT$$

где H - высота верхнего поршня над дном сосуда (толщиной поршня пренебрегаем). Отсюда получаем

$$H = 4h$$

5. Внешними для системы двух шариков силами являются силы реакции стержней - $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$, которые находятся из условия нулевых проекций ускорения шариков на направления, перпендикулярные стержням. В начальный момент, когда отрезок, соединяющий шарики, составляет угол $\alpha = \operatorname{arctg}(1/2)$ с горизонтальным стержнем, эти силы равны



$$N_1 = F\cos\alpha, \qquad N_2 = F\sin\alpha$$

Центр масс системы (находится посередине между шариками) движется так, как будто в нем сосредоточена вся масса системы ($2m$), и на него действует суммарная внешняя сила ($\vec{N}_1 + \vec{N}_2$). Геометрически очевидно, что в начальный момент эта сила направлена в точку пересечения стержней. Это значит, что за некоторый малый интервал времени шарики переместятся так, что их центр масс переместится точно в направлении точки пересечения стержней. А это значит что перемещения шариков за этот интервал будут такими, что соединяющий их отрезок будет все время оставаться параллельным самому себе, и центр масс все время будет двигаться вдоль прямой, соединяющей его начальное положение и точку пересечения стержней. А это значит, что шарики попадут в это точку одновременно. Время движения шариков можно найти так. Так как отрезок, соединяющий шарики все время остается параллельным самому себе, то проекция силы взаимодействия шариков на направление стержней не меняется. Поэтому движение шариков равноускоренное. Применяя закон равноускоренного движения например к нижнему шарику, получим

$$2l = \frac{at^2}{2}$$

где

$$a = \frac{F\cos\alpha}{m} = \frac{2F}{\sqrt{5}m}$$

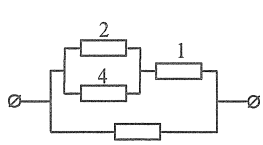
ускорение нижнего шарика. Отсюда находим

$$t = \sqrt{\frac{2\sqrt{5}lm}{F}}$$

(если бы исследовали время движения верхнего шарика, ответ для времени получился таким же).

2.7. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс (Саров, Киров, Тамбов, Воронеж, Санкт-Петербург)

Ответы и решения

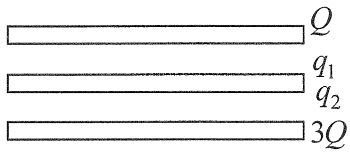


1. Очевидно, что данную цепь с помощью деформации проводов можно привести к виду, показанному на рисунке. Сопротивление нижнего участка r, верхнего $3r/2$. Поэтому ток в верхнем участке (через сопротивление 1) будет составлять 2/3 от тока в нижнем. Между сопротивлениями 2 и 4 верхний ток поделится пополам.

Поэтому ток через сопротивление 2 будет составлять 1/3 от тока через сопротивление 3. Поэтому по закону Джоуля-Ленца заключаем, что

$$\frac{P_2}{P_3}=\frac{1}{9}.$$

2. Пусть на верхней и нижней поверхностях средней пластины распределены заряды q_1 и q_2 (см. рисунок). Из закона сохранения электрического заряда имеем



$$q_1+q_2=2Q$$

Поле внутри средней пластины будет равно нулю. Поэтому

$$E=-\frac{Q}{2S\varepsilon_0}-\frac{q_1}{2S\varepsilon_0}+\frac{q_2}{2S\varepsilon_0}+\frac{3Q}{2S\varepsilon_0}=0 \qquad (*)$$

(формула (*) имеет алгебраический смысл – все заряды со своим знаком – для проекции поля внутри второй пластинки на ось, направленную вертикально вверх). Решая систему уравнений (*), получим

$$q_1=2Q\,,\ q_2=0\,.$$

3. Разбьем кусок веревки, находящийся от расстояния $2l/3$ от оси вращения до конца, на малые элементы, и для каждого напишем второй закон Ньютона. Получим

$$T-T_1=\Delta m_1\omega^2 r_1$$
$$T_1-T_2=\Delta m_2\omega^2 r_2$$
$$T_2-T_3=\Delta m_3\omega^2 r_3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Здесь T, T_1, … - силы натяжения веревки на краях каждого элемента веревки (T - искомая сила), Δm_i - массы элементов, r_i - расстояние от элементов до оси вращения. Складывая уравнения, получим

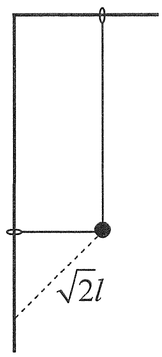
$$T=\Delta m_1\omega^2 r_1+\Delta m_2\omega^2 r_2+\Delta m_3\omega^2 r_3+\ldots=\omega^2\sum_i \Delta m_i r_i=\Delta m\omega^2\,\frac{\sum_i \Delta m_i r_i}{\Delta m}=\Delta m\omega^2 r_c$$

где Δm - масса рассматриваемого куска веревки, которая составляет одну треть от массы всей веревки, r_c - расстояние от оси вращения до центра масс рассматриваемого участка веревки. Очевидно

$$r_c=\frac{2}{3}l+\frac{1}{6}l=\frac{5}{6}l$$

Отсюда находим

$$T = \frac{5}{18} m\omega^2 l .$$



4. Так как кольца невесомы и нет трения, то нить в процессе движения бусинки будет перпендикулярна стержням (достаточно бесконечно малой силы, чтобы их перемещать). Пусть длина вертикального участка нити y, горизонтального - x. Тогда $x + y = 3l$. А это значит, что в системе координат, оси которой совпадают со спицами, траектория бусинки описывается функцией

$$y = -x + 3l$$

т.е. направлена под углом $45°$ к горизонту и пересекает вертикальную спицу на расстоянии $3l$ от точки их соединения (см. рисунок; траектория бусинки показана пунктиром, ее длина $\sqrt{2}l$).

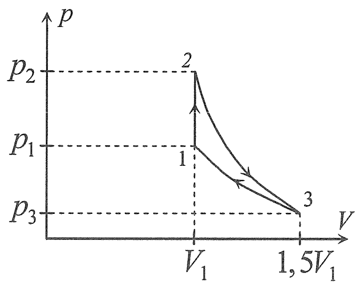
Найдем ускорение бусинки. На бусинку действуют две силы натяжения и сила тяжести. Но поскольку сумма сил натяжения перпендикулярна траектории, то ускорение бусинки равно проекции ускорения свободного падения на направление траектории, т.е.

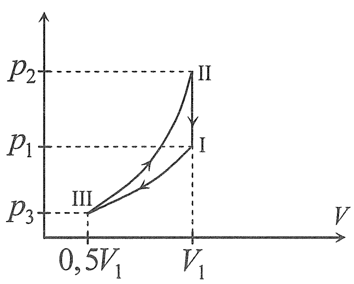
$$a = \frac{\sqrt{2}g}{2} .$$

Поэтому

$$\sqrt{2}l = \frac{\sqrt{2}gt^2}{4} \qquad \Rightarrow \qquad t = 2\sqrt{\frac{l}{g}}$$

5. Пусть объем газа в состоянии 1 (и 2, и I, и II) равен V_1, давление в состояниях 1 и I равно p_1. Тогда объем в состоянии 3 равен $1{,}5V_1$, в состоянии III - $0{,}5V_1$. Так как 1-3 – изотерма, то





$$p_3 = \frac{2}{3} p_1$$

Из уравнения адиабаты находим p_2

$$p_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} p_1$$

Из этих уравнений находим

$$Q_{1-2} = \Delta U_{1-2} = \frac{3}{2}(p_2 - p_1)V_1 = \frac{3}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} - 1\right)p_1V_1$$

Поэтому КПД процесса 1-2-3-1 равен

$$\eta = \frac{A}{\frac{3}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} - 1\right)p_1V_1}$$

где A - работа газа в течение цикла.

В процессе III-II-I-III газ совершает ту же работу, тепло от нагревателя получает в процессе III-II. Найдем это тепло. По первому закону термодинамики имеем

$$Q_{III-II} = \Delta U_{III-II} + A_{III-II}$$

Но работа газа в этом процессе такая же, как работа в процессе 2-3 (та же площадь под графиком). Поэтому

$$A_{III-II} = A_{2-3} = -\Delta U_{2-3} = \Delta U_{1-2} = \frac{3}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} - 1\right)p_1V_1$$

$$\Delta U_{III-II} = \frac{3}{2}\left(p_2V_1 - \frac{1}{2}p_3V_1\right) = \frac{3}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} p_1V_1 - \frac{1}{3}p_1V_1\right) = \frac{3}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} - \frac{1}{3}\right)p_1V_1$$

Отсюда

$$Q_{III-II} = \frac{3}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} - 1\right)p_1V_1 + \frac{3}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} - \frac{1}{3}\right)p_1V_1 = \frac{6}{2}p_1V_1\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} - \frac{2}{3}\right)$$

Поэтому

$$\eta_1 = \frac{A}{\frac{6}{2}p_1V_1\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} - \frac{2}{3}\right)} = \frac{\eta\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} - 1\right)}{2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} - \frac{2}{3}\right)}$$

2.8. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс (Сергиев Посад, Обнинск)

Ответы и решения

1. Пусть скорость вытекания воды из трубки равна v. Тогда за малый интервал времени Δt в сосуд поступает объем воды $vS\Delta t$. А если высота уровня воды в сосуде в этот момент равна x, то уровень воды за время Δt повысится на величину Δx, которая определяется соотношением

$$vS\Delta t = \pi x^2 \mathrm{tg}^2\alpha\, \Delta x$$

Отсюда

$$v = \frac{\pi x^2 \mathrm{tg}^2\alpha\, \Delta x}{S\Delta t} = \frac{4\pi x^2 \Delta x}{9S\Delta t}$$

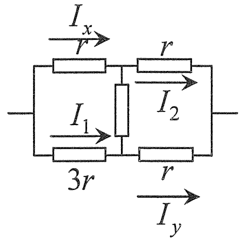
Поскольку

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_0,$$

и $x = v_0 t$ (уровень воды поднимается с постоянной скоростью), то

$$v = \frac{4\pi v_0^3 t^2}{9S}$$

2. Пусть через сопротивления схемы текут токи, показанные на рисунке. Тогда для этих токов выполнены условия



$$rI_x + rI_2 = 3rI_1 + rI_y$$
$$I_x + I_1 = I_y + I_2$$

(первое из них – равенство сумм напряжений в верхнем и нижнем участках цепи, второе – сумма правил токов в верхнем и нижнем центральных узлах). Сокращая в первом равенстве r и вычитая второе равенство из первого, получим

$$I_2 - I_1 = 3I_1 - I_2$$

Отсюда находим

$$I_2 = 2I_1$$

(отметим, что от центрального сопротивления схемы ответ не зависит).

3. Давление газа в начальном состоянии равно

$$p_0 = \frac{nmg}{S}$$

в конечном –

$$p_1 = \frac{(n-1)mg}{S}$$

где m - масса одного груза, S - площадь сечения сосуда, $n = 3$ - число грузов в начальном положении. Поэтому для начального и конечного состояний газа имеем по закону Клапейрона-Менделеева

$$p_0 V_0 = \nu R T_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{nmg}{S} S h_0 = \nu R T_0 \quad \Rightarrow \quad nmgh_0 = \nu R T_0 \qquad (*)$$

$$p_1 V_1 = \nu R T_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(n-1)mg}{S} S h_1 = \nu R T_1 \quad \Rightarrow \quad (n-1)mgh_1 = \nu R T_1 \qquad (**)$$

Где $V_0 = Sh_0$ и $V_1 = Sh_1$ - объем газа в начальном и конечном состоянии, h_0 и h_1 - расстояние от поршня до дна сосуда в начальном и конечном положениях, T_0 и T_1 - начальная и конечная температура газа. При удалении одного груза и подъеме поршня газ совершает работу, которая равна изменению потенциальной энергии двух оставшихся грузов. Поэтому работа газа равна

$$A = (n-1)mg(h_1 - h_0)$$

По первому закону термодинамики имеем

$$\Delta U = -A \qquad \Rightarrow \qquad \frac{3}{2}\nu R\left(T_1 - T_0\right) = -\left(n-1\right)mg\left(h_1 - h_0\right) \qquad (***)$$

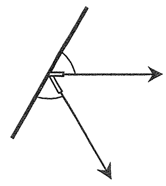
Используя теперь (*) и (**), получим из (***)

$$T_1 = \frac{5n-2}{5n}T_0$$

При $n = 3$ имеем

$$T_1 = \frac{13}{15}T_0$$

4. Очевидно, треугольник, образованный резиновым кольцом после подвешивания к нему груза, будет равносторонним. Действительно, на малый элемент кольца около стержня действуют две силы натяжения, величины которых одинаковы (см. рисунок), и проекции которых на направление стержня также одинаковы (из-за отсутствия трения). Поэтому углы, отмеченные на рисунке дугами, одинаковы, а поскольку один из них равен $60°$, то $60°$ равен и второй, поэтому и гол между резинками также равен $60°$. Поэтому треугольник, образованный резинкой - равносторонний.



Из условия равновесия груза следует, что

$$T = \frac{mg}{2\cos 30°} = \frac{mg}{\sqrt{3}}$$

Чтобы обеспечить такую силу натяжения резина должна растянуться на величину Δl, которую можно найти из условия

$$\Delta l = \frac{T}{k} = \frac{mg}{\sqrt{3}k}$$

Поэтому длина каждой стороны треугольника, образованного резинкой равна

$$\frac{l}{3} + \frac{mg}{3\sqrt{3}k}$$

а расстояние между точкой крепления спиц и телом, которое равно удвоенной высоте треугольника, образованного резинкой, определяется соотношением

$$h = \left(\frac{l}{3} + \frac{mg}{3\sqrt{3}k}\right)\cos 30° = \frac{l}{2\sqrt{3}} + \frac{mg}{6k}$$

5. Поверхностная плотность заряда пластинки определяется как

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

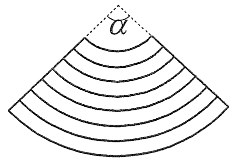
где

$$S = \frac{\alpha}{2}\left(\left(3r\right)^2 - r^2\right) = 4\alpha r^2$$

площадь пластинки (α - в радианах). Отсюда находим

$$\sigma = \frac{Q}{4\alpha r^2}$$

Разобьем пластинку на дуги с радиусами r_1, r_2, … и толщиной Δr_1, Δr_2, …



(см. рисунок). Каждая дуга создает в центре пластинки поле с потенциалом

$$\Delta\varphi_i = \frac{k\Delta Q_i}{r_i} = \frac{k\sigma\Delta S_i}{r_i} = \frac{k\sigma\Delta S_i}{r_i} = \frac{k\sigma\alpha r_i\Delta r_i}{r_i} = k\sigma\alpha\Delta r_i$$

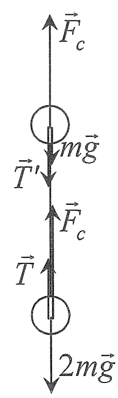
где k - постоянная закона Кулона, ΔQ_i и $\Delta S_i = \alpha r_i \Delta r_i$ - заряд и площадь каждой дуги. Суммируя потенциалы, созданные дугами, и используя формулу для поверхностной плотности заряда пластинки, получим

$$\varphi = k\sigma\alpha\left(\Delta r_1 + \Delta r_2 + \ldots\right) = 2k\sigma\alpha r = \frac{kQ}{2r}$$

(от α потенциал пластинки не зависит).

2.9. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс (Лесной, Снежинск, Курчатов, Ковров, Озерск, Калининград, Смоленск, Рязань, Нововоронеж, Северск, Калуга)

Ответы и решения



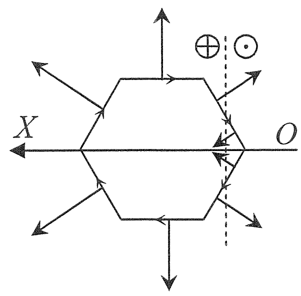
1. На шары будет действовать сила сопротивления среды, которая будет одинакова для каждого шара, поскольку они имеют одинаковые размеры и движутся с одинаковой скоростью. Поэтому второй закон Ньютона для каждого имеет вид

$$2mg = T + F_c$$
$$mg + T = F_c$$

где $m = \rho V$, T - сила натяжения нити, F_c - сила сопротивления воздуха. Из систему уравнений получим

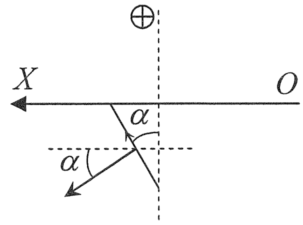
$$T = \frac{mg}{2} = \frac{\rho g V}{2}$$

2. Благодаря симметрии шестиугольника относительно оси OX, показанной на рисунке, суммарная сила будет действовать вдоль этой оси, поэтому будем сразу искать проекции сил Ампера, действующие на отдельные участки шестиугольника, и их складывать.

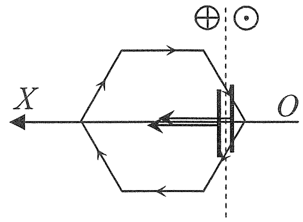


Рассмотрим участок провод длиной l, расположенный под углом α к оси OX. Со стороны магнитного поля на него действует сила Ампера, проекция которой на ось OX равна

$$F_x = IBl\cos\alpha = IBl_y$$



где I - ток в проводнике, l его длина, B - индукция магнитного поля, l_y - проекция проводника на ось, перпендикулярную оси OX, причем если ток течет вверх (на рисунке), эти проекции нужно брать со знаком «+», если вниз (на рисунке), - то «-» для поля, направленного за чертеж., и с противоположными знаками для поля, направленного на нас. Это значит, что суммарная сила, действующая на часть шестиугольника, лежащую в области поля, направленного «за чертеж», действует сила, направленная вдоль оси OX и равная $F_x = IBl_1$, где l_1 - длина отрезка, связывающего точки пересечения шестиугольника границей, разделяющей области поля, направленного за чертеж и на нас. Аналогично, на часть шестиугольника, лежащую в области поля, направленного на нас, действует точно такая же сила. Находя длину l_1 геометрически, найдем суммарную силу, действующую на шестиугольник



$$F_x = \frac{\sqrt{3}}{2}IBl$$

Направлена эта сила вдоль оси OX (влево на рисунке).

3. Пусть количество теплоты, полученное газом на участке 1-2, равно Q_1, отданное на участке 3-4 - Q_2, на участке 2-4 (4-2) газ получил (отдал) Q_3. Тогда

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},\ \eta_1 = \frac{Q_1 - Q_3}{Q_1},\ \eta_2 = \frac{Q_3 - Q_2}{Q_3}$$

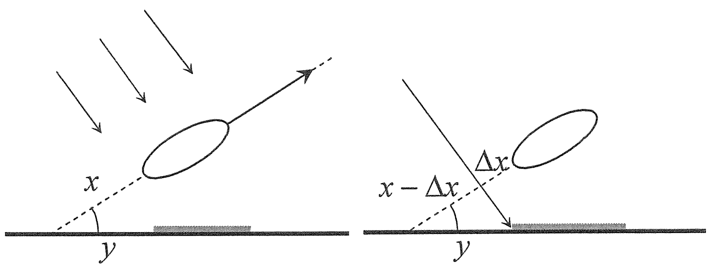
Выражая из второй формулы Q_1, из третьей Q_2 (и то и другое через Q_3), и подставляя эти выражения в первую формулу, получим

$$1 - \eta = (1 - \eta_1)(1 - \eta_2)$$

Или

$$\eta_2 = \frac{\eta - \eta_1}{1 - \eta_1}$$

4. Пусть тарелка находится на расстоянии x от земли (вдоль траектории; см. рисунок). Найдем расстояние y от тени до точки, из которой тарелка начала двигаться.



Из-за того, что скорость тарелки сравнима со скоростью света, тень будет несколько отставать от положения тарелки. Очевидно, для расстояний x и y справедливы соотношения

$$y = \frac{(x - \Delta x)}{\cos\alpha}$$

$$\frac{\Delta x}{(3c/4)} = \frac{(x - \Delta x)\operatorname{tg}\alpha}{c}$$

Отсюда находим

$$\Delta x = \frac{3x\sin\alpha}{4\cos\alpha + 3\sin\alpha}, \quad y = \frac{4x}{4\cos\alpha + 3\sin\alpha}$$

Через малое время Δt расстояние x увеличится на $(3c/4)\Delta t$, а значит тень пройдет расстояние

$$\Delta y = \frac{3c\Delta t}{4\cos\alpha + 3\sin\alpha}.$$

Деля это расстояние на Δt найдем скорость тени

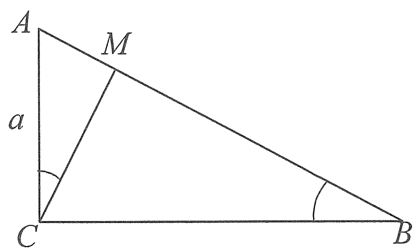
$$v = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{3c}{4\cos\alpha + 3\sin\alpha}$$

5. Потенциал поля пластинки должен линейно зависеть от ее заряда и обратно пропорционально – от ее размеров. При этом от толщины пластинки (при очень малой толщине) этот потенциал зависеть не может: работа поля на расстояниях порядка ее толщины будет мала, поскольку поле равномерно заряженной пластинки нигде не расходится.

Это значит, что потенциал в вершине прямого угла можно записать как

$$\varphi = \frac{Kq}{a} \tag{*}$$

где q - заряд треугольника, a - меньший катет, K - коэффициент пропорциональности, зависящий от геометрии треугольника, но независящий от его размеров и заряда.



Рассмотрим теперь точку, лежащую в основании перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу. Можно считать, что потенциал поля в этой точке создается зарядами двух треугольников, подобных начальному (т.е. с отношением катетов 2:1). Поэтому их потенциалы можно найти по формуле (*) в которую нужно подставить их заряды и меньшие катеты.

Сначала треугольник CAM. Его гипотенуза с одной стороны равна a (как меньший катет исходного треугольника), с другой равна $AM\sqrt{5}$ (поскольку длины катетов в нем относятся как 2:1). Отсюда находим меньший катет этого треугольника

$$AM = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

Очевидно, второй (больший) катет будет равен

$$CM = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

Поэтому площадь этого треугольника равна

$$S_{AMC} = \frac{S_{ABC}}{5},$$

И, следовательно, его заряд также будет равен одной пятой заряда исходного треугольника. Поэтому заряды треугольника AMC создают в точке M поле с потенциалом

$$\varphi_1 = \frac{K(q/5)}{(a/\sqrt{5})} = \frac{Kq}{\sqrt{5}a} = \frac{\varphi}{\sqrt{5}}.$$

Аналогично находим потенциал поля второго треугольника в этой точке

$$\varphi_2 = \frac{K\left(4q/5\right)}{\left(2a/\sqrt{5}\right)} = \frac{2\varphi}{\sqrt{5}}$$

Складывая потенциалы φ_1 и φ_2 находим потенциал электрического поля в точке M

$$\varphi_M = \frac{3\varphi}{\sqrt{5}}$$