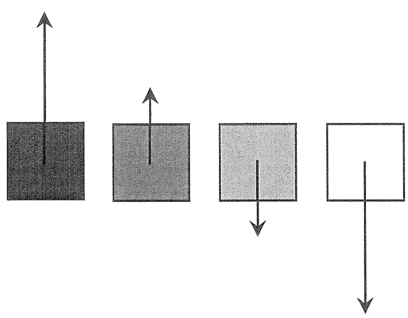
2.10. Отборочный тур олимпиады «Росатом», 10 класс

Ответы и решения



1. Поскольку в условии не сказано, как направлены силы, то, очевидно, существует четыре варианта удерживания тел под водой и, соответственно, четыре тела с разными плотностями (см. рисунок). Для самого тяжелого тела (которое нужно удерживать силой $\vec{F}_2$, направленной вверх) условие равновесия дает

$$mg = F_2 + F_A \qquad \Rightarrow \qquad \rho V g = F_2 + \rho_в V g \qquad \Rightarrow \qquad (\rho - \rho_в)Vg = F_2$$

где m - масса самого тяжелого тела, F_A - действующая на него в толще воды выталкивающая сила Архимеда, V - объем тел, $\rho_в$ - плотность воды. Отсюда находим объем тел

$$V = \frac{F_2}{(\rho - \rho_в)g} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Записывая теперь условия равновесия для остальных тел, найдем

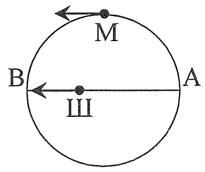
$$\rho_1 gV = F_1 + \rho_в gV \qquad \Rightarrow \qquad \rho_1 = \frac{F_1}{gV} + \rho_в = 1200 \text{ кг/м}^3$$

$$\rho_2 gV = \rho_в gV - F_1 \qquad \Rightarrow \qquad \rho_2 = \rho_в - \frac{F_1}{gV} = 800 \text{ кг/м}^3$$

$$\rho_3 gV = \rho_в gV - F_3 \qquad \Rightarrow \qquad \rho_3 = \rho_в - \frac{F_2}{gV} = 600 \text{ кг/м}^3$$

Итак, всего тел – четыре, их плотности

$$\rho = 1400 \text{ кг/м}^3,\ \rho_1 = 1200 \text{ кг/м}^3,\ \rho_2 = 800 \text{ кг/м}^3,\ \rho_3 = 600 \text{ кг/м}^3.$$



2. Интересно, что в условии задачи вообще не заданы никакие величины. Это значит, что отношение ускорений должно определяться числами порядка единицы: может быть единицами, двойками (или ее степенями), числом π или их комбинациями.

Пусть радиус окружности - R, скорость Матроскина - v, ускорение Шарика - a. Тогда из условия одновременного прихода Матроскина и Шарика в точку В имеем

$$\pi R = vt$$
$$2R = 2vt - \frac{at^2}{2} \qquad (*)$$

(ускорение Шарика, очевидно, должно быть направлено противоположно его движению). Выражая время из первого уравнения и подставляя его во второе, получим

$$2(\pi - 1) = \frac{a}{2}\frac{\pi^2 R}{v^2}$$

Поскольку ускорение Матроскина есть v^2 / R, то из этой формулы находим отношение ускорений Матроскина и Шарика

$$\frac{a_М}{a_Ш} = \frac{v^2}{Ra} = \frac{\pi^2}{4(\pi - 1)} \approx 1,15$$

3. Пусть скорость эскалатора u, его длина L. Тогда в первом случае Вовочка движется со скоростью $v - u$, во втором – со скоростью v и проходит расстояние L. Поэтому для первого и второго случаев получаем

$$\frac{L}{v+u} + \Delta t_1 = \frac{L}{v-u}$$
$$\frac{L}{v+u} + \Delta t_2 = \frac{L}{v}$$

Или

$$\frac{\Delta t_1}{L} = \frac{2u}{(v+u)(v-u)}$$

$$\frac{\Delta t_2}{L} = \frac{u}{(v+u)v}$$

Деля уравнения друг на друга, получим

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{2v}{v-u}$$

Откуда найдем

$$u = \frac{v(\Delta t_1 - 2\Delta t_2)}{\Delta t_1} = 5 \text{ км/час}$$

4. Внутренняя энергия газа в i-ом отсеке в начальный момент времени равна

$$U_i = \alpha \nu_i R T_i = \alpha p_i V_i = \alpha i p V \qquad (*)$$

где α - числовой коэффициент, зависящий от атомности молекул газа (для одноатомного газа – 3/2 и т.д.). После удаления поршней и установления равновесия давление и температура газа во всех отсеках выровняются и внутренняя энергия газа будет равна

$$U = \alpha p_x N V \qquad (**)$$

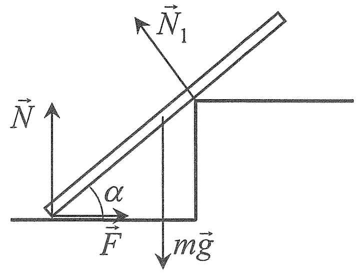
где p_x - искомое давление. Приравнивая энергию (**) и суммы внутренних энергий (*), получим

$$\alpha p V \sum_{i=1}^{N} i = \alpha p_x N V$$

Отсюда находим

$$p_x = \frac{(N+1)}{2} p = 50,5p$$

5. На стержень действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции пола $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}$, сила реакции уступа $\vec{N}_1$, направленная перпендикулярно стержню. Из условия равенства нулю суммы моментов всех сил относительно нижней точки стержня имеем



$$mg\frac{l}{2}\cos\alpha = N_1 \frac{2}{3} l$$

Отсюда

$$N_1 = \frac{3}{4} mg \cos\alpha$$

Силу реакции N найдем из условия равенства нулю суммы вертикальных проекций всех сил, действующих на тело

$$N = mg - N_1 \cos\alpha = mg\left(1 - \frac{3}{4}\cos^2\alpha\right)$$

Чтобы стержень покоился, горизонтальная проекция силы $\vec{N}_1$ не должна превосходить максимальной силы трения kN. Поэтому условие равновесия стержня имеет вид

$$\frac{3}{4}mg\cos\alpha\sin\alpha \le kmg\left(1-\frac{3}{4}\cos^2\alpha\right)$$

или

$$k \ge \frac{(3/4)\cos\alpha\sin\alpha}{1-(3/4)\cos^2\alpha}$$