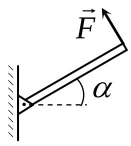
5.1.4. Олимпиада имени академика И.В.Курчатова, 11 класс (отборочный тур олимпиады «Росатом»)

1. Увеличивается или уменьшается температура идеальный газ, расширяющегося по закону $pV^2 = \text{const}$? Во сколько раз изменится температура газа в этом процессе при увеличении объема в 2 раза.

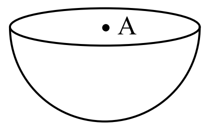
2. В системе двух концентрических сфер с радиусами R и $2R$ внутренняя сфера заземлена с помощью проводника ничтожно малой емкости, внешняя имеет потенциал φ_0. Найти заряды сфер.

3. Один конец стержня, имеющего массу m, прикреплен к вертикальной стенке с помощью шарнира. Ко второму концу стержня приложена некоторая (неизвестная) сила F, направленная перпендикулярно стержню. В равновесии угол между стержнем и горизонтом равен α. Найти силу, с которой стержень действует на ось шарнира.



4. Ящик массой $M = 10$ кг стоит на ленте транспортера. Транспортер включают на короткое время $\Delta t = 4$ с. На какое расстояние относительно земли переместится ящик до момента его полной остановки? Скорость движения ленты транспортера $v_0 = 3$ м/с. Считать, что разгон и остановка ленты происходят мгновенно. Коэффициент трения поверхности ящика о ленту транспортера $\mu = 0{,}1$. Считать, что $g = 10$ м/с^2

5. Имеется полушар радиуса R, равномерно заряженный зарядом Q. Найти напряженность электрического поля в центре полушара (т. А на рисунке).



Ответы и решения

1. Исключая давление из закона Клапейрона-Менделеева с помощью соотношения $pV^2 = \text{const}$, получим

$$\frac{const}{V} = \nu RT$$

Отсюда следует, что в рассматриваемом процессе при увеличении объема температура уменьшается. При увеличении объема газа в 2 раза, температура газа уменьшается в 2 раза.

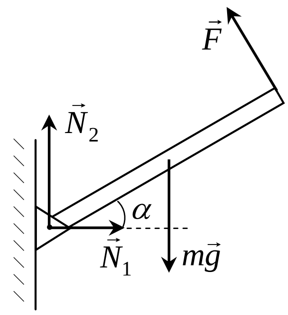
2. Пусть заряд внутренней сферы q, внешней Q. Используя принцип суперпозиции для потенциалов, получим

$$\begin{aligned} \frac{kq}{R} + \frac{kQ}{2R} &= 0 \\ \frac{kq}{2R} + \frac{kQ}{2R} &= \varphi_0 \end{aligned} \qquad (*)$$

где k - постоянная закона Кулона. Решая систему уравнений (*), получим

$$q = -\frac{2R\varphi_0}{k}, \qquad Q = \frac{4R\varphi_0}{k}$$

3. Из условий равновесия стержня (моментов относительно шарнира, и проекций сил на горизонтальную и вертикальную оси) находим значение силы F и составляющие силы реакции шарнира (см. рисунок)



$$F = \frac{1}{2}mg\cos\alpha, \ N_1 = \frac{1}{2}mg\cos\alpha\sin\alpha, \ N_2 = \frac{1}{2}mg\left(2-\cos^2\alpha\right)$$

Отсюда находим силу реакции шарнира

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \frac{1}{4}mg\sqrt{1+3\cos^2 2\alpha}$$

(возможны и другие формы записи этого ответа)

4. Когда лента начала двигаться, на ящик действует сила трения, которая разгоняет его. Поскольку ускорение ящика $a = kg$, то скорость ящика возрастает по закону

$$v(t) = kgt$$

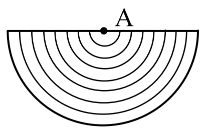
Если бы в течение всего времени движения ленты ящик двигался равноускоренно, то он приобрел бы скорость $kg\Delta t = 4$ м/с, которая больше скорости ленты. Поэтому в течение времени v_0 / kg ящик движется равноускоренно, потом в течение времени $\Delta t - (v_0 / kg)$ равномерно вместе с лентой. За это время ящик проходит расстояние

$$l = \frac{kg\left(v_0 / kg\right)^2}{2} + v_0\left(\Delta t - (v_0 / kg)\right) = v_0\Delta t - \frac{v_0^2}{2kg}$$

После остановки ленты ускорение ящика поменяет направление, поэтому он будет тормозить в течение такого же времени, что он разгонялся до скорости v_0. Поэтому после остановки ленты ящик пройдет до остановки такое же расстояние, что он прошел, двигаясь равноускоренно $v_0^2 / 2kg$. Поэтому ящик пройдет до полной остановки расстояние $S = v_0\Delta t = 12$ м.

5. Рассмотрим вспомогательную задачу: найдем поле равномерно заряженной зарядом q полусферы радиуса r в ее центре. Суммируя поля, создаваемые отдельными участками полусферы, получим (это суммирование легко выполняется без интегрирования – суммирование сводится к нахождению суммы проекций всех малых площадок, на которые можно разбить полусферу, на плоскость замыкающего ее круга - πr^2). В результате для поля равномерно заряженной полусферы в ее центре имеем

$$E = \frac{kq}{2r^2} \qquad (*)$$



Рассмотрим теперь поле равномерно заряженного полушара. Разобьем полушар на тонкие сферические слои (см. рисунок). Тогда поле слоя толщиной Δr и радиусом r можно найти по формуле (*), где заряд этого слоя можно найти по формуле

$$q = \rho V = \rho 2\pi r^2 \Delta r = \frac{Q 2\pi r^2 \Delta r}{(2/3)\pi R^3} = \frac{3Qr^2\Delta r}{R^3}$$

где ρ - плотность заряда полушара. Подставляя этот заряд в (*), получим

$$E = \frac{3}{2}\frac{kQ\Delta r}{R^3} \qquad (**)$$

Суммирование полей (**) легко выполняется, поскольку $\Sigma \Delta r = R$. Отсюда находим

$$E = \frac{3}{2}\frac{kQ}{R^2}$$