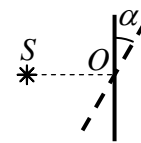


**5.2.2. Димитровград, Самара (СГАУ), Балаково, Рязань, Санкт-Петербург, 11 класс (заключительный этап олимпиады «Росатом»)**

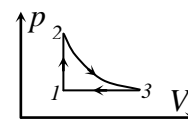
1. Точечный источник света находится на расстоянии  $d$  от зеркала. Зеркало повернули на угол  $\alpha = \arcsin(1/2)$  вокруг оси, перпендикулярной чертежу и проходящей через точку  $O$  (повернутое зеркало показано пунктиром). Найти перемещение изображения.



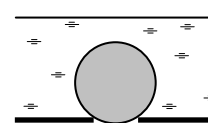
2. Имеется изготовленный из металлической проволоки правильный  $n$ -угольник. Источник напряжения с нулевым внутренним сопротивлением сначала присоединяют к двум соседним вершинам  $n$ -угольника, а затем к вершинам, расположенным через одну. При этом ток через источник уменьшается в полтора раза. Найти число сторон  $n$ -угольника.

3. Симметричная граната, брошенная с начальной скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту, в верхней точке траектории разорвалась на множество одинаковых осколков. Через какое время после взрыва упал на землю самый первый осколок, если осколки падали на землю в течение времени  $\Delta t$ ?

4. С одноатомным идеальным газом происходит циклический процесс, состоящий из изохоры (1-2), адиабаты (2-3) и изобары (3-1). Известно, что в изохорическом процессе давление газа возросло в два раза. Найти КПД цикла. **Указание:** в адиабатическом процессе давление одноатомного идеального газа и его объем связаны соотношением:  $pV^{5/3} = \text{const}$ .

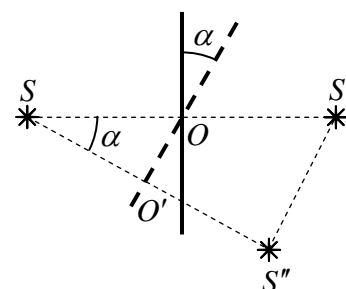


5. В дне сосуда сделано круглое отверстие, которое заткнуто пробкой в виде шара. Радиус шара вдвое больше радиуса отверстия. В сосуд аккуратно наливают воду. При какой максимальной плотности пробка всплывет. Плотность воды  $\rho$  - известна. **Указание.** Объем шарового сегмента определяется формулой  $V = \frac{\pi}{3} (2R^3 - (2R^2 + r^2)\sqrt{R^2 - r^2})$ , где  $R$  - радиус шара,  $r$  - радиус круга, который является основанием сегмента.



**Ответы и решения**

1. Построение старого ( $S'$ ) и нового ( $S''$ ) изображения источника выполнено на рисунке. Очевидно угол  $SS''S'$  - прямой. Действительно, треугольники  $SO'O$  и  $SS''S'$  подобны,



так как у них общий угол  $\alpha$ , а стороны, примыкающие к этому углу пропорциональны

$$\frac{SS'}{SO} = \frac{SS''}{SO'} = 2$$

А поскольку угол  $SO'O$  - прямой, то прямым является и угол  $SS''S'$ . Поэтому перемещение изображения  $S'S''$  при повороте зеркала представляет собой катет прямоугольного треугольника  $SS''S'$ , гипотенуза которого равна  $2d$ . Отсюда находим

$$SS'' = 2d \sin \alpha = d$$

**2.** Найдем сопротивление источника при первом и втором подключениях. Имеем в первом случае (подключение к соседним вершинам)

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r} + \frac{1}{(n-1)r} = \frac{n}{(n-1)r} \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{(n-1)r}{n}$$

где  $r$  - сопротивление одной стороны. Во втором случае (подключение через одну вершину)

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{2r} + \frac{1}{(n-2)r} = \frac{n}{2(n-2)r} \quad \Rightarrow \quad R_2 = \frac{2(n-2)r}{n}$$

Поскольку ток во втором случае меньше в полтора раза, то в полтора раза больше второе сопротивление

$$\frac{2(n-2)}{(n-1)} = \frac{3}{2}$$

Отсюда  $n = 5$ .

**3.** В системе отсчета, связанной с гранатой, для осколка, летящего вниз и летящего вверх, имеем

$$h = v_1 t_1 + \frac{gt_1^2}{2}$$

$$h = -v_1 t_2 + \frac{gt_2^2}{2}$$

где  $h$  - высота, на которой произошел взрыв гранаты,  $v_1$  - скорость, которую приобрели осколки при взрыве,  $t_1$  и  $t_2$  - время падения первого и последнего осколка. Отсюда находим

$$t_1 = \frac{-v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gh}}{g} \quad t_2 = \frac{v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gh}}{g}$$

Вычитая первое равенство из второго, получим  $\Delta t = \frac{2v_1}{g}$ , или

$$v_1 = \frac{g\Delta t}{2}$$

Подставляя это значение в формулу для  $t_1$  и учитывая, что  $h = v_0^2 \sin^2 \alpha / 2g$ , найдем время падения первого осколка на землю

$$t_1 = \frac{\Delta t}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{4v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2 \Delta t^2}} - 1 \right)$$

**4.** КПД циклического процесса можно найти как

$$\eta = \frac{Q_H - Q_X}{Q_H}$$

Газ получает тепло в процессе 1-2, отдает – в процессе 3-1. Применяя к процессу 1-2 первый закон термодинамики, найдем количество теплоты, полученное от нагревателя

$$Q_H = \frac{3}{2} \nu R \Delta T = \frac{3}{2} V_1 (2p_1 - p_1) = \frac{3}{2} p_1 V_1$$

где  $p_1$  и  $V_1$  - давление и объем газа в состоянии 1. Применяя первый закон термодинамики к процессу 3-1, найдем количество теплоты, отданное холодильнику

$$Q_X = \frac{5}{2} \nu R \Delta T = \frac{5}{2} p_1 (V_3 - V_1)$$

где  $V_3$  - объем газа в состоянии 3. Из уравнения адиабатического процесса

$$2p_1 V_1^{5/3} = p_1 V_3^{5/3}$$

получаем  $V_3 = 2^{3/5} V_1$ . Отсюда находим  $Q_X$  и КПД цикла

$$\eta = 1 - \frac{5(2^{3/5} - 1)}{3}$$

**5.** Найдем выталкивающую силу, действующую на шар. Сила со стороны воды действует только на «боковую» поверхность шара, находящуюся в воде. Поэтому выталкивающая сила, действующая на шар, будет равна

$$F = \rho g V_{жид} - \rho g h S,$$

где  $V_{жид}$  - часть объема шара, находящаяся в жидкости,  $h$  - толщина слоя жидкости,  $S$  - площадь отверстия. Из этой формулы следует, что выталкивающая сила будет возрастать до того момента, пока сечение шара поверхностью воды будут больше

сечения отверстия. Поэтому максимальная выталкивающая сила определяется соотношением

$$F_{\max} = \rho g \left( \frac{4}{3} \pi R^3 - 2v \right) - \rho g h S$$

где  $v$  - объем сегмента, «отрезаемого» от шара отверстием. Используя далее формулу указания для объема сегмента, получим

$$F_{\max} = \rho g \left( \frac{4\pi R^3}{3} - 2v \right) - 2\rho g \sqrt{R^2 - (R/2)^2} \pi (R/2)^2$$

Требую, чтобы выталкивающая сила была больше силы тяжести, действующей на шар, получим условие на максимальную плотность пробки, при которой она всплывет

$$\rho_1 = \frac{3\sqrt{3}}{32} \rho$$