9 класс

Вариант 1

Задача 1. Ответ: 22 (23, если учитывать старт) .

Решение.

Случай 1. Первый и второй авто расположены на одном диаметре. Это бывает в моменты времени $t_{1,2}^{k}$ (мин), когда расстояние между авто по трассе кратно половине ее длины.

$$t_{1,2}^{k}=\frac{0,375}{3}\cdot 60\cdot k=7,5\cdot k,\ k=1,2,...,8$$

Случай 2. Первый и третий авто расположены на одном диаметре. Это бывает в моменты времени $t_{1,3}^{m}$ (мин), когда расстояние между авто по трассе кратно половине ее длины.

$$t_{1,3}^{m}=\frac{0,375}{5}\cdot 60\cdot m=4,5\cdot m,\ m=1,2,...,13$$

Случай 3. Второй и третий авто расположены на одном диаметре. Это бывает в моменты времени $t_{2,3}^{m}$ (мин), когда расстояние между авто по трассе кратно половине ее длины.

$$t_{2,3}^{n}=\frac{0,375}{2}\cdot 60\cdot n=11,25\cdot n,\ n=1,2,...,5$$

Обозначение: $T_{1,2}=\left\{t_{1,2}^{k}\right\},T_{1,3}=\left\{t_{1,3}^{m}\right\},T_{2,3}=\left\{t_{2,3}^{n}\right\}$ – числовые множества моментов времени, отмеченные в случаях 1 – 3.

Нужно найти число $s(T)$ элементов множества $T=T_{1,2}\cup T_{1,3}\cup T_{2,3}$.

Из рассмотренных случаев 1 – 3 имеем $s(T_{1,2})=8,\ s(T_{1,3})=13,\ s(T_{2,3})=5$

Число элементов попарных пересечений множеств:

$$s\left(T_{1,2}\cap T_{1,3}\right)=2$$

$$7,5\cdot k=4,5\cdot m\to 5k=3m\to\begin{cases}m=5l\\ k=3l\end{cases},l=1,2$$

$$s\left(T_{1,2}\cap T_{2,3}\right)=2$$

$$7,5\cdot k=11,25\cdot n\to 2k=3n\to\begin{cases}n=2l\\ k=3l\end{cases},l=1,2$$

$$s\left(T_{1,3}\cap T_{2,3}\right)=2$$

$$4,5\cdot m=11,25\cdot n\to 2m=5n\to\begin{cases}n=2l\\ m=5l\end{cases},l=1,2$$

Наконец, число элементов $s\left(T_{1,2}\cap T_{1,3}\cap T_{2,3}\right)$ определяется числом допустимых троек $\left(k,m,n\right)$, для которых

$$7,5k=4,5m=11,25n\to 5k=3m=7,5n\to 10k=6m=15n.$$

Такие тройки имеют вид $n = 2l,\ m = 5l, k = 3l,\ l = 1,2$ и их две.

По общей множественной формуле

$$s(T) = s\left(T_{1,2} \cup T_{1,3} \cup T_{2,3}\right) = s\left(T_{1,2}\right) + s\left(T_{1,3}\right) + s\left(T_{2,3}\right) - s\left(T_{1,2} \cap T_{1,3}\right) - s\left(T_{1,2} \cap T_{2,3}\right) -$$
$$- s\left(T_{1,3} \cap T_{2,3}\right) + s\left(T_{1,2} \cap T_{1,3} \cap T_{2,3}\right) = 8 + 13 + 5 - 2 - 2 - 2 + 2 = 22$$

Задача 2. Ответ: 250.

Решение.

$$A = (5n+1)3^n - 7 = (5n+1)(4-1)^n - 7 = 4B + (-1)^n(5n+1) - 7$$

для некоторого целого числа B. Тогда делимость A на 4 означает делимость на 4 числа

$$(-1)^n(5n+1) - 7.$$

Случай 1. $n = 2k,\ k = 1,2,\ldots 500$.

$$(-1)^n(5n+1) - 7 = 10k - 6 = 4m \to 5k - 2m = 3 \to \left[\begin{array}{l} k = 1 + 2s \\ m = 1 + 5s \end{array}\right. \to n = 4s + 2 \to$$
$$\to 1 \le 4s + 2 \le 1000 \to s = 0,1,\ldots,249$$

Случай 2. $n = 2k+1,\ k = 0,1,\ldots 499$.

$$(-1)^n(5n+1) - 7 = -(10k+13) = 4m.$$

Уравнение целых решений не имеет.

Задача 3. Ответ: -5.

Решение. Координаты каждой пары точек пересечения прямой и параболы удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} y = ax^2 + 2ax + c \\ y = ax + b \end{cases} \to ax^2 + ax + (c-b) = 0$$

Сумма абсцисс двух точек пересечения равна -1, поэтому для десяти точек это значение равно -5.

Задача 4. Ответ: тройки, образованные перестановкой чисел $(11;2;13)$ и тройки, полученные перестановкой чисел $(11;3;7)$ (всего 12 различных троек).

Решение. Одно из чисел $(p;q;r)$ делится на 11, поэтому в силу простоты оно, например p, равно 11. Тогда

$$qr = q + r + 11 \to r(q-1) = q + 11 \to q \ne 1 \to r = \frac{q+11}{q-1} = 1 + \frac{12}{q-1}.$$

Случай 1. $q - 1 = 1 \to q = 2, r = 13 \to (p;q;r) = (11;2;13)$.

Случай 2. $q - 1 = 2 \to q = 3, r = 7 \to (p;q;r) = (11;3;7)$.

Случай 3. $q-1=3 \to q=4 \to \varnothing$.

Случай 4. $q-1=4 \to q=5, r=4 \to \varnothing$.

Случай 5. $q-1=6 \to q=7, r=3 \to (p;q;r)=(11;7;3)$.

Случай 6. $q-1=12 \to q=13, r=2 \to (p;q;r)=(11;13;2)$.

Поскольку $(p;q;r)$ входят в уравнение симметрично, все искомые тройки (их шесть) получаются из одной, например $(11;2;13)$, различными перестановками чисел 11, 2 и 13.

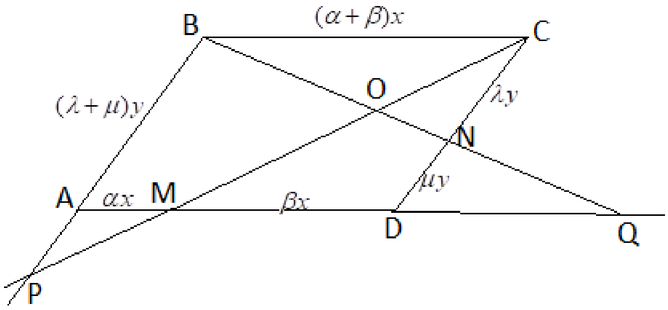
Задача 5. Ответ: $OM:OC=13:6$.

Вариант 0

Точки M и N делят стороны AD и CD параллелограмма $ABCD$ в отношении $AM:MD=\alpha:\beta$ и $CN:ND=\lambda:\mu$, соответственно. Прямые CM и BN пересекаются в точке O. Найти отношение длин отрезков OM и OC. Найти отношение длин отрезков OB и ON.

Ответ: 1) $OM:OC=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}+\dfrac{\mu}{\lambda}$; 2) $BO:ON=\dfrac{(\lambda+\mu)(\alpha+\beta)}{\lambda\beta}$.

Решение.



Обозначения: $AM=\alpha x, MB=\beta x, CN=\lambda y, ND=\mu y$.

Дополнительные построения: прямая CM продолжена до пересечения с продолжением стороны BA в точке P; прямая BN продолжена до пересечения с продолжением стороны AD в точке Q .

Нахождение длины отрезка AP:

$$\frac{AP}{CD}=\frac{AM}{MD} \to \frac{AP}{(\lambda+\mu)y}=\frac{\alpha x}{\beta x} \to AP=\frac{\alpha}{\beta}(\lambda+\mu)y \text{ (подобие треугольников)}$$

Нахождение длины отрезка DQ :

$$\frac{DQ}{BC}=\frac{DN}{NC}=\frac{\mu}{\lambda} \to DQ=\frac{\mu}{\lambda}(\alpha+\beta)x \text{ (подобие треугольников)}$$

Вычисление отношения $BO:ON$:

$$\frac{BO}{ON}=\frac{BP}{CN}=\frac{(\lambda+\mu)y+\frac{\alpha}{\beta}(\lambda+\mu)y}{\lambda y}=\frac{(\lambda+\mu)(\alpha+\beta)}{\lambda\beta}$$ (*) (Подобие треугольников)

Вычисление отношения $OM:CO$:

$$\frac{OM}{OC}=\frac{MQ}{BC}=\frac{\beta x+\frac{\mu}{\lambda}(\alpha+\beta)x}{(\alpha+\beta)x}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}+\frac{\mu}{\lambda}$$ (**) (Подобие треугольников)

В варианте 1 $\alpha=1,\beta=2,\lambda=2,\mu=3$. По формуле (**) получим $OM:OC=13:6$.

Вариант 2

Задача 1. Ответ: 26 (27, если учитывать старт) .

Задача 2. Ответ: 200.

Решение.

Случай 1. $n=2k$.

$$A=(3n+1)2^n+3=(6k+1))4^k+3=(6k+1))(5-1)^k+3=5B+(-1)^k(6k+1)+3$$

$$k=2m$$

$$12m+1+3=5s\to 12m-5s=-4\to\left[\begin{array}{l}m=-2+5t\\ s=-4+12t\end{array}\right.\to n=4(5t-2)=20t-8$$

$$1\le 20t-8\le 1000\to t=1,2,...50$$

$$k=2m+1$$

$$-12m-4=5p\to 5p+12m=-4\to\left[\begin{array}{l}m=-2+5t\\ p=4+12t\end{array}\right.\to n=2(2m+1)=20t-6$$

$$1\le 20t-6\le 1000\to t=1,2,...,50$$

Случай 2. $n=2k+1$.

$$A=(3n+1)2^n+3=2(6k+4)(5-1)^k+3=5B+(-1)^k(12k+8)+3$$

$$k=2m$$

$$24m+11=5s\to\left[\begin{array}{l}m=5t+1\\ s=24t+7\end{array}\right.\to n=4(5t+1)+1=20t+5$$

$$1\le 20t+5\le 1000\to t=0,1,...,49$$

$$k=2m+1$$

$$3-(12(2m+1)+8)=-17-24m=5s\to 24m+5s=-17\to\left[\begin{array}{l}m=5t-3\\ s=11-24t\end{array}\right.$$

$$n=2(2m+1)+1=4m+3=4(5t-3)+3=20t-9$$

$$1\le 20t-9\le 1000\to t=1,2,...,50$$

Задача 3. Ответ: $\frac{1}{64}$.

Решение. Координаты каждой пары точек пересечения прямой и гиперболы удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} y = \frac{k}{x} \\ y = 2kx + b \end{cases} \rightarrow \frac{k}{x} = 2kx + b \rightarrow 2kx^2 + bx - k = 0$$

Произведение абсцисс двух точек пересечения равна $-\frac{1}{2}$, поэтому для двенадцати точек это значение равно $\frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$.

Задача 4. Ответ: тройки, образованные перестановкой чисел $(17;2;19)$ (всего 6 троек).

Задача 5. Ответ: $BO:ON = 4$.

Решение. В варианте 2 $\alpha = 1, \beta = 3, \lambda = 1, \mu = 2$. По формуле (*) получим $BO:ON = 4$

Вариант 3

Задача 1. Ответ: 10 (11, если учитывать старт) .

Задача 2. Ответ: 333.

Задача 3. Ответ:.16

Задача 4. Ответ: тройки, образованные перестановкой чисел $(11;3;19)$ (всего 6 троек).

Задача 5. Ответ: $OM:OC = 33:7$.

Решение. В варианте 3 $\alpha = 2, \beta = 5, \lambda = 1, \mu = 4$. По формуле (**) получим $OM:OC = 33:7$.

Вариант 4

Задача 1. Ответ: 35 (36, если учитывать старт).

Задача 2. Ответ: 166.

Задача 3. Ответ: -128.

Задача 4. Ответ: тройки, образованные перестановкой чисел $(2;5;7)$ (всего 6 троек).

Задача 5. Ответ: $BO:ON = 35:8$.

Решение. В варианте 4 $\alpha = 1, \beta = 4, \lambda = 2, \mu = 5$. По формуле (*) получим $BO:ON = 35:8$.