

Заключительный тур финал, март 2022, 9 класс

Вариант 1

Задача 1 Ответ: 780

Решение. Вычислим сумму чисел $s_1 = 1 + 2 + \dots + 19 = 19 \cdot 10$ и сумму $s_2 = 21 + 22 + \dots + 39 = 30 \cdot 19$.

Заметим, что $s_2 = 3s_1$. Из этого следует, что выше диагонали все располагаются числа большие 21, а ниже – меньшие 20. Значит на диагонали все числа равны 20 и их сумма равна $20 \cdot 39 = 780$

Задача 2

Решение. Число слагаемых в сумме четное и их можно разбить на пары вида

$\frac{1}{k} + \frac{1}{2021-k} = \frac{2021}{k(2021-k)}$, $k = 1, 2, \dots, 1010$, каждая из которых представляет собой дробь с

числителем, делящимся на 2021. Число $2021 = 43 \cdot 47$ не является простым. Поэтому дробь сократима. После сокращения числитель не делится нацело на 2021. Таким образом мы получили противоречие. Следовательно, утверждение неверно.

Во 2,3,4 вариантах используется тот же прием. Соответствующие числа являются простыми. Числитель и знаменатель дроби, получившейся после преобразований, являются взаимно простыми. Из чего следует, что утверждение верно.

Задача 3 Ответ: 4 и 1

Решение. Если x и y числа, задуманные Васей, то для чисел $x + y$, $x - y$, xy , $\frac{x}{y}$, записанных на

доске, среднее арифметическое двух из них равно среднему геометрическому двух других.

Действительно,

$$\frac{(x+y) + (x-y)}{2} = \sqrt{xy \cdot \frac{x}{y}} = x$$

Среди предложенных Петей чисел только два 5 и 3 обладают этим свойством:

$$\frac{5+3}{2} = \sqrt{4 \cdot 4} = 4 = x$$

Второе число $y < 4$ таково, что $x - y = 3 \rightarrow y = 1$

Задача 4 Ответ: 30 месяцев, 6 т. р.

Решение. Пусть a_1 – сумма выплаченного кредита за первый месяц, $a_n = a_1 + (n-1)$ – сумма погашения кредита в последний месяц. Тогда сумма кредита равна

$$615 = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = n \left(a_1 + \frac{n-1}{2} \right) \rightarrow$$

$$1230 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 41 = n(2a_1 - 1 + n) > n^2 \rightarrow n \leq 35$$

Число n является делителем 1230, не большим 35. Наибольшим таким делителем является $n = 30$

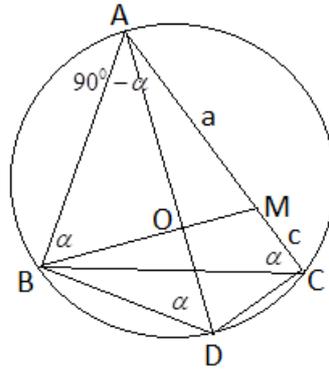
Тогда $41 = 2a_1 - 1 + 30 \rightarrow a_1 = 6$

Задача 5 Ответ: $BC = \sqrt{(a+c)(2a+c-\sqrt{a(a+c)})} = 2\sqrt{7-2\sqrt{3}}$

Вариант 0

Угол при вершине A остроугольного треугольника ABC равен 60° . Через вершины B и C проведены прямые, перпендикулярные сторонам AB и AC соответственно, пересекающиеся в точке D . Через вершину B проведена прямая, перпендикулярная прямой AD и пересекающая сторону AC в точке M . Длины отрезков MA и MC равны a и c соответственно. Найти длину стороны BC .

Ответ: $BC = \sqrt{(a+c)(2a+c-\sqrt{a(a+c)})}$



Решение.

Дополнительные построения: окружность, описанная около треугольника ABC , проходит через точку D .

1. Угол ABM равен углу BCA ;
2. Треугольники ABM и ABC подобны по двум равным углам;
3. Пропорции:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AB}{AC} \rightarrow AB^2 = a(a+c) \rightarrow AB = \sqrt{a(a+c)}$$

4. Теорема косинусов:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC = a(a+c) + (a+c)^2 - (a+c)\sqrt{a(a+c)} =$$

$$= (a+c)(2a+c - \sqrt{a(a+c)})$$

Вариант 2

Задача 1 Ответ: 17

Задача 2. Доказательство

Задача 3 Ответ: 6 и 2

Задача 4 Ответ: 35 месяцев, 14 т. р.

Задача 5 Ответ: $BC = \sqrt{(a+c)(2a+c - \sqrt{a(a+c)})} = 3\sqrt{17 - 6\sqrt{2}}$

Вариант 3

Задача 1 Ответ: все числа одинаковые и равны 19

Задача 2. Доказательство

Задача 3 Ответ: 8 и 2

Задача 4 Ответ: 34 месяца, 11 т. р.

Задача 5 Ответ: $BC = \sqrt{(a+c)(2a+c - \sqrt{a(a+c)})} = 3\sqrt{14 - 3\sqrt{5}}$

Вариант 4

Задача 1 Ответ: все числа одинаковые и равны 19

Задача 2. Доказательство

Задача 3 Ответ: 12 и 3

Задача 4 Ответ: 42 месяца, 12 т. р.

Задача 5 Ответ: $BC = \sqrt{(a+c)(2a+c - \sqrt{a(a+c)})} = 4\sqrt{31 - 4\sqrt{15}}$

Критерии проверки финал Росатом 9 класс

1 задача

Есть что-то правдоподобное, относящееся к делу	0.5
Указано уравнение и есть вычисления	1
Недостаточное обоснование	1.5

2 задача

Верные числа подбором	1
Есть объяснения, почему выбраны верные числа, но недостаточное обоснование	1.5

3 задача

Что-то посчитал	0.5
Догадался складывать дроби попарно	1
Указал, что число простое (2,3,4 варианты), и не простое (1 вариант)	1.5

4 задача

Есть здравые рассуждения по теме	0.5
Записал верное уравнение	1
Верное решение, но есть незначительные ошибки	1.5

5 задача

Верный чертеж	0.5
Нашел и указал подобные треугольники	1
Верное решение, но есть незначительные ошибки	1.5