8 класс

Вариант 1

Задача 1. Ответ: 10 мальчиков, 13 девочек.

Решение. Обозначение: n – число мальчиков, m – число девочек, k – количество кругов, пробегаемых каждым мальчиком, r – число конфет, полученных каждым мальчиком.

Условие задачи:

$$\begin{cases} nk + m(k-1) = 286 \\ nr + m(r+1) = 243 \end{cases}, k \geq 2, r \geq 1$$

Сложим уравнения системы:

$$n(k+r) + m(k+r) = 529 = 23^2 \rightarrow (n+m)(k+r) = 23^2$$

С учетом целочисленности переменных и простоты числа 23, имеем

$$\begin{cases} n+m = 23 \\ k+r = 23 \end{cases}$$

Из первого уравнения имеем:

$$(m+n)k = 286 + m \rightarrow m = 23k - 286$$

$$1 \leq m \leq 22 \rightarrow 1 \leq 23k - 286 \leq 22 \rightarrow \frac{287}{23} \leq k \leq \frac{308}{23} \rightarrow 12,4 \leq k \leq 13,4 \rightarrow k = 13$$

$$m = 13 \rightarrow n = 10 \rightarrow r = 10$$

Задача 2.

Решение. Рассмотрим последовательность чисел

$$a_1 = 2, a_2 = 22, ..., a_n = \underbrace{22...2}_{n}, ...$$

Если одно из этих чисел делится на 3333, то Петя прав. Предположим противное: ни одно из этих чисел не делится на 3333. Тогда существует бесконечное число пар, имеющих при делении на 3333 одинаковые остатки. Пусть a_k и a_m, $m > k$ такая пара. Тогда число

$$b = a_m - a_k = \underbrace{22...2}_{m-k}\underbrace{00...0}_{k} = \underbrace{22...2}_{m-k} \cdot 10^k = a_{m-k} \cdot 10^k$$

делится на 3333. Поскольку числа 10^k и 3333 взаимно простые, то на 3333 делится число a_{m-k} из последовательности и таких чисел бесконечно много.

Задача 3. Ответ: 80

Решение. На схеме соединим стрелкой собаку и посетителя, который ее погладил. От каждой собаки отходит по 4 стрелки, всего стрелок $4 \cdot 100 = 400$. От каждого посетителя отходят по 5 стрелок. Если всего посетителей на выставке n, то число стрелок от них исходящих равно $5 \cdot n = 400 \rightarrow n = 80$

Задача 4. Ответ: $(1;1)$

Решение. Преобразование:

$$p(p^3-27)=-26q^3 \to p(p-3)(p^2+3p+9)=-26q^3$$

Для натуральных $(p;q)$ правая часть равенства отрицательная, левая – отрицательна только при двух значениях $p=1$ и $p=2$.

Случай 1. $p=1$

Уравнение: $-26=-26q^3 \to q^3=1 \to q=1 \to p=1$

Случай 2. $p=2$

Уравнение: $-38=-26q^3 \to q^3=\frac{19}{13}\varnothing$ решений не имеет.

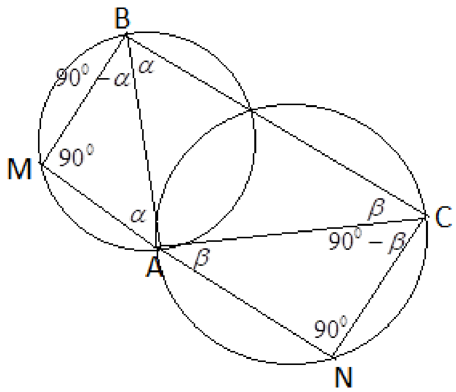
Задача 5. Ответ: 1.

Вариант 0

Окружности K_1 и K_2 имеют общую точку A. Через точку A проведены три прямые: две проходят через центры окружностей и пересекают их в точках B и C, третья – параллельна BC и пересекает окружности в точках M и N. Найти длину отрезка MN, если длина отрезка BC равна a.

Ответ: a

Решение.



Обозначения: α – угол BAM, β – угол CAN

Угол $ABC=\alpha$, угол $ACB=\beta$ (вертикальные углы).

Угол $AMB=90^0$, угол $ANC=90^0$ (опираются на диаметр).

Угол $ABM=90^0-\alpha$, угол $ACN=90^0-\beta$ (острые углы в прямоугольных треугольниках)

Вывод: углы MBC и NCB прямые, четырехугольник $MBCN$ – прямоугольник и $MN = BC = a$

Вариант 2

Задача 1. Ответ: 8 конфет, 2 девочки.

Задача 2. Доказательство.

Задача 3. Ответ: 120.

Задача 4. Ответ: $(2;2)$.

Задача 5. Ответ: 2.

Вариант 3

Задача 1. Ответ: 18 кругов, 14 конфет.

Задача 2. Доказательство.

Задача 3. Ответ: 90.

Задача 4. Ответ: $(4;2)$.

Задача 5. Ответ: 3.

Вариант 4

Задача 1. Ответ: 12 мальчиков, 5 конфет.

Задача 2. Доказательство.

Задача 3. Ответ: 160.

Задача 4. Ответ: пустое множество.

Задача 5. Ответ: 4.