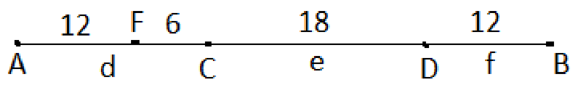
11 класс

Вариант 1

Задача 1. Ответ: 6 часов.

Решение.



Использование велосипеда уменьшает время операции. Если, например, Коля в начале сел на велосипед, то он должен ехать на нем до передачи его Максиму в точке D, принадлежащей отрезку AB. Положение точки D определяется условием:

$$\frac{f}{6}=\frac{48-f}{18}\to f=12$$

Время передачи велосипеда:

$$t_1=\frac{48}{18+6}=2.$$

За это время Петя пройдет расстояние 12км в направлении города В и окажется в точке F. На отрезке FD Петя и Максим двигаются навстречу друг другу и для уменьшения времени операции Максим должен передать велосипед Петру. Это произойдет при их встрече в точке С. Положение точки С на отрезке FD определяется условием:

$$\begin{cases}\dfrac{d-12}{6}=\dfrac{e}{18}\\ e+d=36\end{cases}\to e=d=18 .$$

Время прихода Коли в город В: $T_1=2+\dfrac{12}{6}=4ч$.

Время прихода Пети в город В: $T_2=\dfrac{18}{6}+\dfrac{30}{18}=3+\dfrac{5}{3}=4ч\ 40мин$.

Время прихода Максима в город А: $T_3=2+1+3=6ч$.

Минимальное время окончания операции 6 часов.

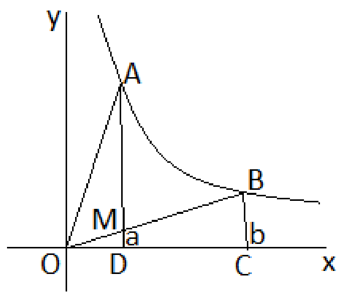
Задача 2.

Решение. Обозначение: $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$ – длины сторон пятиугольника, d – разность прогрессии. d делится на 2, поскольку является разностью двух нечетных чисел. Поскольку 7 наименьшее простое число большее 5, а $d\geq 2$, то $a_2>7$. Тогда числа a_2,a_3,a_4 не делятся на 3 и, хотя бы два из них, имеют одинаковые остатки при их делении на 3. В этом случае, их разность, равная d или $2d$, должна делиться на 3. Последнее означает, что d кратно 3. Числа a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 не делятся на 5 поскольку они простые и больше 5, поэтому хотя бы два из них имеют одинаковые остатки при делении на 5. Тогда из разность равна $k\cdot d$ с константой k от 1 до 4 делится на 5. Это бывает, когда d кратно 5. Таким образом, d кратно $30 = 2\cdot 3\cdot 5$. Периметр пятиугольника

$$P = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5a_1 + 10d > 25 + 10\cdot 30 = 325.$$

Задача 3. Ответ: 4.

Решение.



Найдем разность площадей криволинейного треугольника и криволинейной трапеции:

$$S_{OAB} - S_{ABCD} = \left(S_{OMA} + S_{MAB}\right) - \left(S_{MAB} + S_{DMBC}\right) = S_{OMA} - S_{DMBC} =$$

$$= \left(S_{ODA} - S_{ODM}\right) - \left(S_{OBC} - S_{ODM}\right) = S_{ODA} - S_{OBC} = \frac{1}{2}\left(a\cdot f(a) - b\cdot f(b)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left((2a+c) - (2b+c)\right) = a - b = -3$$

Тогда $S_{OAB} = S_{ABCD} - 3 = 7 - 3 = 4$.

Задача 4. Ответ:. $a \in [-1;0)$

Решение. Преобразование:

$$\begin{cases} tgx + tgy = 1 \\ ctgx + ctgy = a \end{cases} \to \begin{cases} tgx + tgy = 1 \\ \dfrac{tgx + tgy}{tgx\cdot tgy} = a \end{cases} \to \begin{cases} tgx + tgy = 1 \\ tgx\cdot tgy = 1/a \end{cases} \quad (*)$$

Существование решений (*) (по теореме Виета):

$$z^2 - z + \frac{1}{a} = 0 \to D = 1 - \frac{4}{a} \ge 0 \to \frac{a-4}{a} \ge 0 \to a \in (-\infty;0) \cup [4;+\infty) \quad (**)$$

Следствие из (*):

$$tg(x+y) = \frac{tgx + tgy}{1 - tgx\cdot tgy} = \frac{1}{1 - 1/a} = \frac{a}{a-1}$$

$$\sin 2(x+y) = \frac{2tg(x+y)}{1 + tg^2(x+y)} = \frac{2\cdot\dfrac{a}{a-1}}{1 + \dfrac{a^2}{(a-1)^2}} = \frac{2a(a-1)}{a^2 + (a-1)^2}, a \ne 0, a \ne 1$$

Решение неравенства:

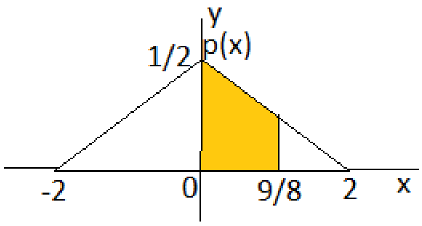
$$\sin 2(x+y)\le 0{,}8 \to \frac{2a(a-1)}{a^2+(a-1)^2}\le\frac{4}{5}\to a^2-a-2\le 0\to a\in[-1;2].$$

Пересекая с условием (**), получим ответ: $a\in[-1;0)$.

Задача 5. Ответ: $P(A)=\dfrac{207}{512}$.

Решение. Уравнение $ax^2+3x+2=0$ имеет два отрицательных корня, если

$$\begin{cases} D=9-8a>0 \\ a>0 \end{cases}\to a\in\left(0;\frac{9}{8}\right)$$



$$P(A)=\int_0^{9/8}p(x)dx=\frac{207}{512}\quad \text{(площадь трапеции).}$$

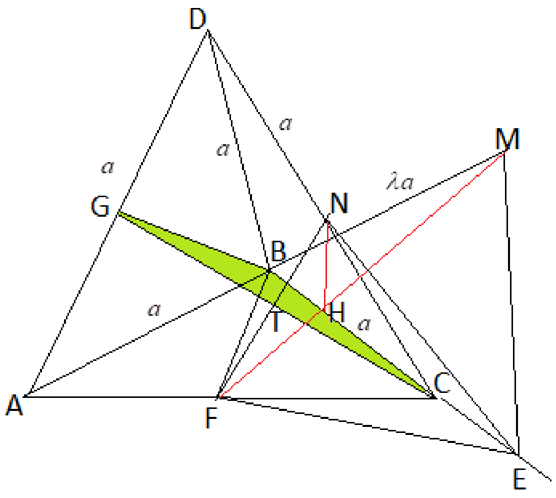
Задача 6. Ответ: $|L|_{\min}=\dfrac{31}{2}=15{,}5$.

Вариант 0

Основание ABC пирамиды $ABCD$ лежит на плоскости S. Точка M находится на продолжении прямой AB за точку B так, что $MB:AB=\lambda$. Точка N – середина ребра DC. Кривая L, соединяющая точки M и N, лежит либо на плоскости S, либо на боковой поверхности пирамиды. Найти наименьшую возможную длину кривой L, если все ребра пирамиды, включая ребра основания, имеют длину a.

Ответ: $|L|_{\min}=\dfrac{a}{2}\sqrt{4\lambda^2+6\lambda+3}$.

Решение. Пусть кривая L искомая. Она не может не пересечь прямую AB в некоторой точке E. Тогда часть кривой от точки M до точки E – отрезок прямой. Точка F – середина ребра AC. Геометрическим местом точек, равноудаленных от N и F, является срединная плоскость P, перпендикулярная NF и проходящая через середину отрезка NF. Плоскость P совпадает с плоскостью BCG, где G – середина ребра AD.



Точка T середина отрезка NF и медианы CG. Прямая BC лежит на плоскости P, поэтому $|L| \ge ME + EN = ME + EF \ge MF$. Равенство достигается, если точка E совпадает с точкой H – пересечением прямых MF и BC, $\min|L| = MF$. Искомая кривая – ломаная MHN.

Вычисления:

$$MF^2 = a^2(1+\lambda)^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{1}{2}a^2(1+\lambda) = \frac{a^2}{4}\left(4(1+\lambda)^2 - 2(1+\lambda)+1\right) = \frac{a^2}{4}(4\lambda^2+6\lambda+3) \to$$
$$\to MF = \frac{a}{2}\sqrt{4\lambda^2+6\lambda+3}$$

В варианте 1

$$\lambda = 2,\ a = \sqrt{31} \to |L|_{\min} = \frac{a}{2}\sqrt{4\lambda^2+6\lambda+3}\Big|_{\lambda=2,a=\sqrt{31}} = \frac{31}{2} = 15,5.$$

Вариант 2

Задача 1. Ответ: 4 часа 20 минут.

Задача 2. Доказательство.

Задача 3. Ответ: 5.

Задача 4. Ответ: $a \in (-1;1)$.

Решение. $\begin{cases} tgx + tgy = a-1 \\ ctgx + ctgy = a+1 \end{cases} \to \begin{cases} tgx + tgy = a-1 \\ tgx \cdot tgy = \dfrac{a-1}{a+1} \end{cases}$ (*)

Существование решений (*) (по теореме Виета):

$$\frac{(a-1)(a^2-5)}{a+1} \ge 0 \to a \in \left(-\infty; -\sqrt{5}\right] \cup (-1;1) \cup \left[\sqrt{5}; +\infty\right) \ (**)$$

Следствие из (*):

$$tg(x+y) = \frac{tgx + tgy}{1 - tgx \cdot tgy} == \frac{a^2-1}{2},$$

$$\cos 2(x+y)=\frac{1-tg^2(x+y)}{1+tg^2(x+y)}=\frac{4-(a^2-1)^2}{4+(a^2-1)^2}\geq -\frac{5}{13}$$

Решение неравенства:

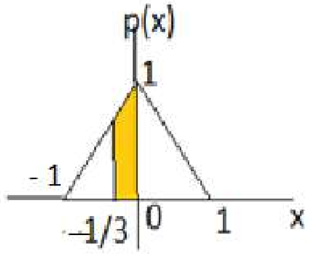
$$\frac{4-(a^2-1)^2}{4+(a^2-1)^2}\geq -\frac{5}{13}\to a^4-2a^2-8\leq 0\to a\in[-2;2]$$

Пересекая с условием (**), получим $a\in(-1;1)$.

Задача 5. Ответ: $P(A)=\frac{5}{18}$.

Решение. Уравнение имеет корни и они меньше 1, если

$$\begin{cases} D=a^2-16a\geq 0 \\ x_b=\frac{a}{2}<1,\ f(1)=1+3a>0 \end{cases}\to a\in\left(-\frac{1}{3};0\right]$$



$$P(A)=\int_{-1/3}^{0}(1+x)dx=\frac{5}{18}.$$

Задача 6. Ответ: $|L|_{\min}=\frac{a}{2}\sqrt{4\lambda^2+6\lambda+3}=7$.

Решение. $\lambda=\frac{1}{2},\ a=2\sqrt{7}\to|L|_{\min}=\frac{a}{2}\sqrt{4\lambda^2+6\lambda+3}\Big|_{\lambda=\frac{1}{2},a=2\sqrt{7}}=7$.

Вариант 3

Задача 1. Ответ: 6 часов.

Задача 2. Доказательство.

Задача 3 .Ответ: 5.

Задача 4. Ответ:. $a\in(-2;0)\cup[2;3)$

Решение. $\begin{cases} tgx+tgy=a \\ ctgx+ctgy=2 \end{cases}\to\begin{cases} tgx+tgy=a \\ tgx\cdot tgy=\frac{a}{2} \end{cases}$ (*)

Существование решений (*) (по теореме Виета):

$$a^2-2a\ge 0\to a\in(-\infty;0)\cup[2;+\infty)\ \ (**)$$

Следствие из (*):

$$tg(x+y)=\frac{tgx+tgy}{1-tgx\cdot tgy}==\frac{2a}{2-a}$$

$$tg2(x+y)=\frac{2tg(x+y)}{1-tg^2(x+y)}=\frac{2a(2-a)}{(2-3a)(2+a)}<\frac{6}{35}$$

Решение неравенства:

$$\frac{2a(2-a)}{(2-3a)(2+a)}<\frac{6}{35}\to\frac{(a-3)(13a-2)}{(3a-2)(a+2)}<0\to a\in\left(-2;\frac{2}{13}\right)\cup\left(\frac{2}{3};3\right)$$

Пересекая с условием (**), получим $a\in(-2;0)\cup[2;3)$.

Задача 5. Ответ: $P(A)=\dfrac{1}{50}$.

Решение. Уравнение $x^2+3x+a=0$ имеет корень на отрезке $[1;2]$, если $a\in[-10;-4]$.

$$P(A)=\int_{-5}^{-4}p(x)dx=\frac{1}{50}$$

Задача 6. Ответ: $|L|_{\min}=\dfrac{43}{2}=21,5$

Решение. $\lambda=\dfrac{5}{2},\ a=\sqrt{43}\to|L|_{\min}=\dfrac{a}{2}\sqrt{4\lambda^2+6\lambda+3}\Big|_{\lambda=2,5,a=\sqrt{43}}=\dfrac{43}{2}=21,5$

Вариант 4

Задача 1. Ответ: 8 часов.

Задача 2. Доказательство.

Задача 3. Ответ: 13 .

Задача 4 Ответ: $a\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left[\sqrt{2};2\right)$

Решение. $\begin{cases}tgx+tgy=2a\\ ctgx+ctgy=a\end{cases}\to\begin{cases}tgx+tgy=2a\\ tgx\cdot tgy=2\end{cases}$ (*)

Существование решений (*) (по теореме Виета):

$$a^2-2\ge 0\to a\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)\ \ (**)$$

Следствие из (*):

$$tg(x+y)=\frac{tgx+tgy}{1-tgx\cdot tgy}=-2a$$

$$ctg2(x+y)=\frac{1-tg^2(x+y)}{2tg(x+y)}=\frac{4a^2-1}{4a}<\frac{15}{8}$$

Решение неравенства:

$$\frac{4a^2-1}{4a}<\frac{15}{8}\to\frac{8a^2-15a-2}{a}<0\to\frac{(a-2)(8a+1)}{a}<0\to a\in\left(-\infty;-\frac{1}{8}\right)\cup(0;2)$$

Пересекая с условием (**), получим $a\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left[\sqrt{2};2\right)$.

Задача 5. Ответ: $P(A)=\frac{5}{18}$.

Решение. Уравнение имеет хотя бы один корень больший 1, если $a\in(-1;0)$.

Вероятность этого события $P(A)=\int_{-1}^{0}p(x)dx=\frac{5}{18}$.

Задача 6. Ответ: $|L|_{\min}=\frac{21}{2}=10,5$.

Решение. $\lambda=\frac{3}{2},\ a=\sqrt{21}\to|L|_{\min}=\frac{a}{2}\sqrt{4\lambda^2+6\lambda+3}\Big|_{\lambda=1,5,a=\sqrt{21}}=\frac{21}{2}=10,5$.