Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом», математика, март 2022, 11 класс (комплект №1)

11 класс. Вариант № 1

1. Петя пришел на остановку автобуса, едущего до школы с остановками равноотстоящими друг от друга, и, не увидев автобуса на дороге, решил пробежаться и сесть в автобус на следующих остановках по пути в школу. Бежал Петя так, что в любой момент времени мог заметить появление автобуса на дороге за своей спиной. Увидев автобус, Петя может повернуть назад или сохранить направление движения. Известно, что скорость движения автобуса в 4 раза превосходит скорость бега Пети, а увидеть автобус он может на расстоянии не более 1 км. Найти наибольшее значение расстояния между остановками, при котором независимо от того повернет Петя назад при обнаружении автобуса или нет, он сможет сесть в автобус на остановке. (время нахождения автобуса на остановке не учитывать)

2. Координаты $(x; y)$ точек в квадрате $\{(x;y): 0 \le x \le 2\pi, 0 \le y \le 2\pi\}$ удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin 1 \\ \cos x + \cos y = \cos 1 \end{cases}$. Сколько таких точек находится в квадрате? Найти координаты $(x; y)$ наиболее удаленной точки от центра квадрата.

3. Блоха Кузя может совершать прыжки по прямой L. Старт для прыжков находится в точке A прямой L, длина одного прыжка h, направление каждого прыжка выбирается случайным и равновозможным. Найти вероятность того, что, сделав от четырех до восьми случайных прыжков, Кузя хотя бы один раз будет находиться на расстоянии $3h$ от A.

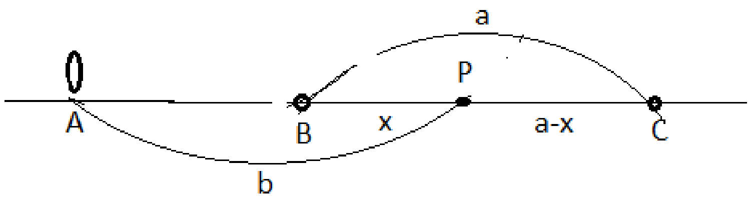
4. Длины ребер a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 прямоугольных параллелепипедов P_A и P_B – целые числа. Если в параллелепипеде P_A увеличить на 1 длину одного из ребер a_1, a_2 или a_3, то отношение объемов $V_A : V_B$ изменится на 3, 5 или на 7 единиц соответственно. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение отношение объемов $V_A : V_B$.

5. Можно ли множество из 2017 чисел $\{\log_2 5, \log_2 6, \log_2 7, ..., \log_2 2021\}$ разбить на две части так, чтобы сумма чисел, попавших в одну из этих частей, отличалась от суммы чисел в другой не более, чем на 1 (по абсолютному значению)?

6. По диагоналям оснований AC и B_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a ползут два муравья Гоша и Леша. Движение они начали одновременно из точек A и B_1 соответственно с постоянной скоростью, причем скорость Леши была в два раза больше скорости передвижения Гоши и закончили, когда Леша оказался в точке D_1. Какое наименьшее расстояние разделяло Гошу и Лешу во время движения?

Задача 1 **Ответ:** $a_{\max} = \frac{8}{15}$ км

Решение:



A – положение автобуса на дороге в момент, когда его увидел Петя;

P – положение Пети на дороге в момент, когда он увидел автобус;

B – положение последней остановки, которую миновал Петя к моменту, когда он увидел автобус;

C – положение следующей за B остановки;

a – расстояние между остановками;

x – расстояние между точками B и P; v – скорость бега Пети.

Случай 1. Увидев автобус, Петя повернул назад. Петя окажется на остановке B не позднее автобуса и сможет на него пересесть, если

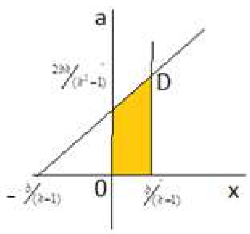
$$\frac{x}{v} \le \frac{1-x}{4v} \Rightarrow x \le \frac{b}{5} \qquad (1)$$

Случай 2. Увидев автобус, Петя не изменил направления движения. Петя окажется на остановке C не позднее автобуса и сможет на него пересесть, если

$$\frac{a-x}{v} \le \frac{1-x+a}{4v} \Rightarrow a-x \le \frac{b}{3} \qquad (2)$$

.

По условию задачи, (1) и (2) должны выполняться одновременно. На рис изображено множество значений a и x, при которых они выполняются.



Наибольшее допустимое значение a соответствует ординате точки D – пересечения прямых $x = \frac{1}{5}$ и $a = x + \frac{1}{3} \Rightarrow a_{\max} = \frac{8}{15}$.

Задача 2 **Ответ:** 1) две точки; 2) $\begin{cases} x=1+\dfrac{5\pi}{3} \\ y=1+\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$ и $\begin{cases} x=1+\dfrac{\pi}{3} \\ y=1+\dfrac{5\pi}{3} \end{cases}$

Решение

Умножаем первое уравнение на $\cos 1$, второе – на $\sin 1$ и вычитаем результаты:

$$(\sin x+\sin y)\cos 1-(\cos x+\cos y)\sin 1=0 \;\Rightarrow$$
$$(\sin x\cos 1-\cos x\sin 1)+(\sin y\cos 1-\cos y\sin 1)=0 \;\Rightarrow$$
$$\sin(x-1)+\sin(y-1)=0 \;\Rightarrow\; \sin(x-1)=\sin(1-y) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x-1=1-y+2\pi k & (3) \\ x-1=\pi-1+y+2\pi m & (4) \end{array}\right.$$

Умножаем первое уравнение на $\sin 1$, второе – на $\cos 1$ и складываем результаты:

$$(\sin x+\sin y)\sin 1+(\cos x+\cos y)\cos 1=1 \to$$
$$(\cos x\cos 1+\sin x\sin 1)+(\cos y\cos 1+\sin y\sin 1)=1 \to$$
$$\cos(x-1)+\cos(y-1)=1$$

Из последнего равенства и (3) имеем

$$2\cos(y-1)=1 \to \cos(y-1)=\cos\frac{\pi}{3} \to \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{\pi}{3}+1+2\pi s, \;(5) \\ y=1-\dfrac{\pi}{3}+2\pi l, \;(6) \end{array}\right.$$

Из серии (5) условию задачи удовлетворяет только $y_1=\dfrac{\pi}{3}+1$, из серии (6) - только $y_2=1+\dfrac{5\pi}{3}$.

Им соответствуют серия $x_1=2-y_1+2\pi k$, содержащая единственное значение $x_1=1+\dfrac{5\pi}{3}$, и серия $x_2=2-y_2+2\pi k \to x_2=1-\dfrac{5\pi}{3}+2\pi l$ также содержащая единственное значение $x_2=1+\dfrac{\pi}{3}$.

Таким образом, случаю (3) соответствует два симметричных решения

$$\left(1+\frac{5\pi}{3};1+\frac{\pi}{3}\right),\left(1+\frac{\pi}{3};1+\frac{5\pi}{3}\right)$$

Случай (4) не реализуется, поскольку $\cos(x-2)=-\cos(y-2)$ и равенство $\cos(x-2)+\cos(y-2)=1$ невозможно.

Обе точки равноудалены от центра квадрата.

Задача 3 **Ответ:** $P(A)=\frac{2}{5}\cdot\frac{73}{64}=\frac{73}{160}$

Решение

Обозначение: p_n^k – вероятность того, сделав $k,\ k=1,2,\ldots$ прыжков блоха отклоняется от A на величину $nh,\ n=\pm1,\pm2,\ldots$ (отрицательные n указывают, что блоха находится слева от A, положительные – справа, число $n=0$ соответствует точке A).

Свойства p_n^k:

1) $p_n^k=0$ для $n>0,\ k<n$, $p_n^n=\frac{1}{2^n}$

2) $p_n^k=p_{-n}^k$ (равновозможность направления прыжка)

3) попасть на $(k+1)$ прыжке в положение nh возможно по условию только из положений $(n-1)h$ и $(n+1)h$ с вероятностью $0,5$, поэтому

$$p_n^{k+1}=\frac{1}{2}p_{n-1}^k+\frac{1}{2}p_{n+1}^k=\frac{1}{2}\left(p_{n-1}^k+p_{n+1}^k\right)$$

4) при фиксированном $k\geq1$ и всех, для $n>k\Rightarrow p_n^k=0$. Ниже приведена часть таблицы для определения p_n^k.

$k\setminus n$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	½	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	¼	0	½	0	¼	0	0	0	0	0	0
3	0	3/8	0	3/8	0	1/8	0	0	0	0	0
4	1/4	0	3/8	0	¼	0	1/16	0	0	0	0
5	0	5/16	0	5/16	0	5/32	0	1/32	0	0	0
6	15/64	0	5/16	0	15/64	0	3/32	0	1/64	0	0
7	0	35/128	0	35/128	0	21/128	0	7/128	0	1/128	0
8	7/32	0	35/128	0	7/32	0	7/64	0	1/32	0	1/256

Вероятности, что Кузя закончил прыжки в точке $3h$ записаны в столбце с номером $n=3$ и строками от $k=4$ до $k=8$ (отмечены желтым). Но Кузя побывал в точке $3h$ и если он закончил движение в точках расположенных правее $3h$ (до $8h$ включительно, соответствующие позиции отмечены зеленым). Однако Кузя мог, побывав в точке $3h$, закончить движение и в симметричных относительно $3h$ точках (т.е. слева от $3h$, но с теми же вероятностями, что и справа от $3h$), поэтому отмеченные зеленым вероятности надо умножить на 2. Для $n=-3$ числа те же. Считаем, что количество бросков от 4 до 8 равновероятно (с вероятностью 1/5). Тогда суммируем вероятности, отмеченные желтым, добавляем удвоенные вероятности, отмеченные зеленым, результат умножаем на 2 и на 1/5. Получим

$$P(A)=\frac{2}{5}\left(\frac{1}{16}\cdot2+\frac{5}{32}+\frac{1}{32}\cdot2+\left(\frac{3}{32}+\frac{1}{64}\right)\cdot2+\frac{21}{128}+\left(\frac{7}{128}+\frac{1}{128}\right)\cdot2+\left(\frac{7}{64}+\frac{1}{32}+\frac{1}{256}\right)\cdot2\right)=\frac{73}{160}$$

Задача 4 Ответ: 105

Решение

Обозначение: $C = V_A : V_B = \dfrac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3}$

Условие:

$$\frac{(a_1+1)\cdot a_2 \cdot a_3}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3} - \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3} = 3 = \frac{1 \cdot a_2 \cdot a_3}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3} = \frac{1}{a_1} \cdot C \quad \Rightarrow C = 3 \cdot a_1$$

Аналогично, $C = 5 \cdot a_2$ и $C = 7 \cdot a_3$

В этом случае, целое число C делится на 3, 5 и 7. С учетом взаимной простоты этих чисел, $C = 105k,\ k \in Z$ и $C \geq 105$. Покажем, что $C = 105$ реализуется как отношение объемов некоторых P_A и P_B.

Например, $a_1 = 35, a_2 = 21, a_3 = 15,\ b_1 = 3, b_2 = 5, b_3 = 7$

Тогда $\dfrac{36 \cdot 21 \cdot 15}{3 \cdot 5 \cdot 7} - \dfrac{35 \cdot 21 \cdot 15}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \dfrac{21 \cdot 15}{3 \cdot 5 \cdot 7} = 3$

Аналогично,

$$\frac{35 \cdot 22 \cdot 15}{3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{35 \cdot 21 \cdot 15}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{35 \cdot 15}{3 \cdot 5 \cdot 7} = 5, \quad \frac{35 \cdot 21 \cdot 16}{3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{35 \cdot 21 \cdot 15}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{35 \cdot 21}{3 \cdot 5 \cdot 7} = 7$$

Задача 5 Ответ: можно

Решение

На первом шаге в группе A разместим логарифмы нечетных чисел, а в группе B – четных:

$$A = \{\log_2 5, \log_2 7, \log_2 9, \ldots, \log_2 2021\},\ B = \{\log_2 6, \log_2 8, \log_2 10, \ldots, \log_2 2020\}$$

Обозначение: σ_A, σ_B – сумма чисел в группах A и B соответственно.

Покажем, что $\sigma_A - \sigma_B > 1$. Действительно,

$$\begin{aligned} &\log_2 7 > \log_2 6 \\ &\log_2 9 > \log_2 8 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\log_2 2021 > \log_2 2020 \\ &\sigma_A - \log_2 5 > \sigma_B \quad \Rightarrow \sigma_A - \sigma_B > \log_2 5 > 1 \end{aligned}$$

Преобразование множеств A и B:

Перенесем число $\log_2 2021$ из группы A в группу B, а число $\log_2 2020$ наоборот – из B в A.

Поскольку $\log_2 2021 > \log_2 2020$ разность $\sigma_A - \sigma_B$ уменьшилась на величину

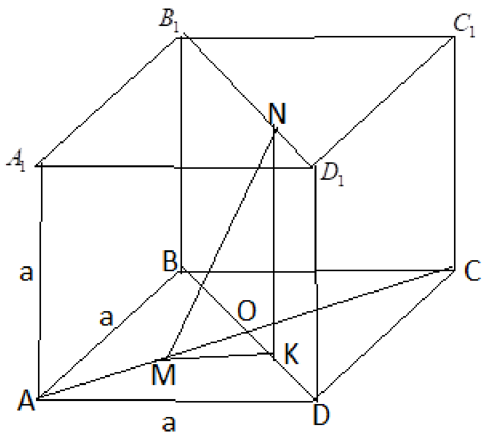
$$\delta_1 = \log_2 2021 - \log_2 2020 = \log_2 \frac{2021}{2020} = \log_2\left(1 + \frac{1}{2020}\right) < 1$$

Если для вновь образованных множеств A и B разность $\sigma_A - \sigma_B > 0$, меняем местами числа $\log_2 2019$ и $\log_2 2018$. По-прежнему, разность $\sigma_A - \sigma_B$ уменьшается на величину

$\delta_2 = \log_2 2019 - \log_2 2018 = \log_2 \frac{2019}{2018} < 1$. Если разность $\sigma_A - \sigma_B > 0$, по процесс перекладывания чисел из одного множества в другое может быть продолжен. Если на каком-то шаге $\sigma_A - \sigma_B$ поменяет знак, то $|\sigma_A - \sigma_B| < 1$ и искомое разбиение достигнуто. Это обязательно произойдет за конечное число шагов, поскольку замена множеств A и B местами приводит к смене знака величины $\sigma_A - \sigma_B$.

Задача 6 **Ответ:** $d_{\min} = a\sqrt{\frac{11}{10}}$

Решение



Обозначения:

M, N – положение муравьев в момент времени t;

K – проекция точки N на диагональ BD;

v – скорость движения Гоши, $2v$ – скорость движения Леши;

$$B_1N = BK = 2vt,\ AM = vt \to OM^2 + OK^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - vt\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - 2vt\right)^2$$

$$MN^2 = f(t) = a^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - vt\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - 2vt\right)^2$$

Исследование на экстремум функции $f(t)$ на отрезке $t \in \left[0; \frac{a\sqrt{2}}{2v}\right]$:

Функция $f(t)$ – квадратный трехчлен с положительным коэффициентом при t^2 – имеет минимум при $t=t^*=\frac{a}{v\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{5}$, если $t^*\in\left[0;\frac{a\sqrt{2}}{2v}\right]$. Проверяем $t^*=\frac{a}{v\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{5}\le\frac{a\sqrt{2}}{2v}$ – верно. Тогда

$$f_{\min}=f(t^*)=\frac{a^2}{2}\left(3-\frac{4}{5}\right)\quad\Rightarrow d_{\min}=a\cdot\sqrt{\frac{11}{10}}$$

Вариант № 2

1. Петя пришел на остановку автобуса, едущего до школы с остановками равноотстоящими друг от друга, и, не увидев автобуса на дороге, решил пробежаться и сесть в автобус на следующих остановках по пути в школу. Бежал Петя так, что в любой момент времени мог заметить появление автобуса на дороге за своей спиной. Увидев автобус, Петя может повернуть назад или сохранить направление движения. Известно, что скорость движения автобуса в 3 раза превосходит скорость бега Пети, а увидеть автобус он может на расстоянии не более $0,8$ км. Найти наибольшее значение расстояния между остановками, при котором независимо от того повернет Петя назад при обнаружении автобуса или нет, он сможет сесть в автобус на остановке. (время нахождения автобуса на остановке не учитывать)

Ответ: $a_{\max}=0.6$ км

2. Координаты $(x;y)$ точек в квадрате $\{(x;y):-\pi\le x\le\pi, 0\le y\le 2\pi\}$ удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases}\sin x+\sin y=\sin 2\\ \cos x+\cos y=\cos 2\end{cases}$. Сколько таких точек находится в квадрате? Найти координаты $(x;y)$ точки с наименьшей ординатой.

Ответ: 1) две точки; 2) $x=2+\frac{\pi}{3}, y=2-\frac{\pi}{3}$

3. Блоха Кузя может совершать прыжки по прямой L. Старт для прыжков находится в точке A прямой L, длина одного прыжка h, направление каждого прыжка выбирается случайным и равновозможным. Найти вероятность того, что, сделав от трех до девяти случайных прыжков, Кузя хотя бы один раз будет находиться на расстоянии $4h$ от A.

Ответ: $P(A)=\frac{2}{7}\cdot\frac{47}{64}=\frac{47}{224}$

4. Длины ребер a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 прямоугольных параллелепипедов P_A и P_B – целые числа. Если в параллелепипеде P_A увеличить на 1 длину одного из ребер a_1, a_2 или a_3, то отношение объемов $V_A:V_B$ изменится на 5, 7 или на 11 единиц соответственно. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение отношение объемов $V_A:V_B$.

Ответ: 385

5. Можно ли множество из 2019 чисел $\{\log_4 5, \log_4 6, \log_4 7, ..., \log_4 2023\}$ разбить на две части так, чтобы сумма чисел, попавших в одну из этих частей, отличалась от суммы чисел в другой не более, чем на 1 (по абсолютному значению)?

Ответ: можно

6. По диагоналям оснований AC и B_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a ползут два муравья Гоша и Леша. Движение они начали одновременно из точек A и B_1 соответственно с постоянной скоростью, причем скорость Леши была в три раза больше скорости передвижения Гоши и закончили, когда Леша оказался в точке D_1. Какое наименьшее расстояние разделяло Гошу и Лешу во время движения?

Ответ: $d_{\min} = a\sqrt{\frac{6}{5}}$

Вариант № 3

1. Петя пришел на остановку автобуса, едущего до школы с остановками равноотстоящими друг от друга, и, не увидев автобуса на дороге, решил пробежаться и сесть в автобус на следующих остановках по пути в школу. Бежал Петя так, что в любой момент времени мог заметить появление автобуса на дороге за своей спиной. Увидев автобус, Петя может повернуть назад или сохранить направление движения. Известно, что скорость движения автобуса в 5 раз превосходит скорость бега Пети, а увидеть автобус он может на расстоянии не более $0,6$ км. Найти наибольшее значение расстояния между остановками, при котором независимо от того повернет Петя назад при обнаружении автобуса или нет, он сможет сесть в автобус на остановке. (время нахождения автобуса на остановке не учитывать)

Ответ: $a_{\max} = 0,25$ км

2. Координаты $(x;y)$ точек в квадрате $\{(x;y): -\pi \le x \le 2\pi, 0 \le y \le 3\pi\}$ удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin 3 \\ \cos x + \cos y = \cos 3 \end{cases}$. Найти координаты $(x;y)$ всех таких точек.

Ответ: 1) пять точек;

2) $\begin{cases} x_1 = 3 - \frac{\pi}{3} \\ y_1 = 3 + \frac{\pi}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x = 3 - \frac{5\pi}{3} \\ y = 3 + \frac{5\pi}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 = 3 - \frac{5\pi}{3} \\ y_1 = 3 - \frac{\pi}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 = 3 + \frac{\pi}{3} \\ y_1 = 3 - \frac{\pi}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 = 3 + \frac{\pi}{3} \\ y_1 = 3 + \frac{5\pi}{3} \end{cases}$.

3. Блоха Кузя может совершать прыжки по прямой L. Старт для прыжков находится в точке A прямой L, длина одного прыжка h, направление каждого прыжка выбирается случайным и равновозможным. Найти вероятность того, что, сделав от двух до пяти случайных прыжков, Кузя хотя бы один раз будет находиться на расстоянии $2h$ от A.

Ответ: $P(A) = \frac{5}{8}$

4. Длины ребер a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 прямоугольных параллелепипедов P_A и P_B – целые числа. Если в параллелепипеде P_A увеличить на 1 длину одного из ребер a_1, a_2 или a_3, то отношение объемов $V_A : V_B$ изменится на 3, 7 или на 11 единиц соответственно. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение отношение объемов $V_A : V_B$.

Ответ: 231

5. Можно ли множество из 2021 чисел $\{\log_3 5, \log_3 6, ..., \log_3 2025\}$ разбить на две части так, чтобы сумма чисел, попавших в одну из этих частей, отличалась от суммы чисел в другой не более, чем на 1 (по абсолютному значению)?

Ответ: можно

6. По диагоналям оснований AC и B_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a ползут два муравья Гоша и Леша. Движение они начали одновременно из точек A и B_1 соответственно с постоянной скоростью, причем скорость Леши была в четыре раза больше скорости передвижения Гоши и закончили, когда Леша оказался в точке D_1. Какое наименьшее расстояние разделяло Гошу и Лешу во время движения?

Ответ: $d_{\min} = a\sqrt{\frac{43}{34}}$

Вариант № 4

1. Петя пришел на остановку автобуса, едущего до школы с остановками равноотстоящими друг от друга, и, не увидев автобуса на дороге, решил пробежаться и сесть в автобус на следующих остановках по пути в школу. Бежал Петя так, что в любой момент времени мог заметить появление автобуса на дороге за своей спиной. Увидев автобус, Петя может повернуть назад или сохранить направление движения. Известно, что скорость движения автобуса в 4 раза превосходит скорость бега Пети, а увидеть автобус он может на расстоянии не более $1,5$ км. Найти наибольшее значение расстояния между остановками, при котором независимо от того повернет Петя назад при обнаружении автобуса или нет, он сможет сесть в автобус на остановке.

Ответ: $a_{\max} = 0.8$ км

2. Координаты $(x; y)$ точек в квадрате $\{(x; y): -2\pi \le x \le 3\pi, -\pi \le y \le 4\pi\}$ удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin 4 \\ \cos x + \cos y = \cos 4 \end{cases}$. Сколько таких точек? Найти координаты $(x; y)$ точек с наибольшей абсциссой.

Ответ: 1) 13 точек; 2) $\begin{cases} x = 4 + \frac{5\pi}{3} \\ y = 4 + \frac{\pi}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x = 4 + \frac{5\pi}{3} \\ y = 4 + \frac{7\pi}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x = 4 + \frac{5\pi}{3} \\ y = 4 - \frac{5\pi}{3} \end{cases}$

3. Блоха Кузя может совершать прыжки по прямой L. Старт для прыжков находится в точке A прямой L, длина одного прыжка h, направление каждого прыжка выбирается случайным и равновозможным. Найти вероятность того, что, сделав от пяти до десяти случайных прыжков, Кузя хотя бы один раз будет находиться на расстоянии $5h$ от A.

Ответ: $P(A) = \frac{2}{6} \cdot \frac{108}{256} = \frac{9}{64}$

4. Длины ребер a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 прямоугольных параллелепипедов P_A и P_B – целые числа. Если в параллелепипеде P_A увеличить на 1 длину одного из ребер a_1, a_2 или a_3, то отношение объемов $V_A : V_B$ изменится на 3, 11 или на 13 единиц соответственно. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение отношение объемов $V_A : V_B$.

Ответ: 429

5. Можно ли множество из 2015 чисел $\{\log_5 6, \log_5 7, \log_5 8, ..., \log_5 2020\}$ разбить на две части так, чтобы сумма чисел, попавших в одну из этих частей, отличалась от суммы чисел в другой не более, чем на 1 (по абсолютному значению)?

Ответ: можно

6. По диагоналям оснований AC и B_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a ползут два муравья Гоша и Леша. Движение они начали одновременно из точек A и B_1 соответственно с постоянной скоростью, причем скорость Леши была в пять раз больше скорости передвижения Гоши и закончили, когда Леша оказался в точке D_1. Какое наименьшее расстояние разделяло Гошу и Лешу во время движения?

Ответ: $d_{\min} = a\sqrt{\frac{17}{13}}$

Критерии проверки финал Росатом 11 класс (комплект №1)

1. **задача**
   - составил верно одно неравенство (вперед или назад) **0.5**
   - составил верно оба неравенства и изобразил на плоскости решение системы неравенств (или имеются верные рассуждения по поводу решения этой системы неравенств) **1.0**
   - решил задачу верно с полным обоснованием **2.0**
   - небольшие погрешности при нахождении S_{max} **1.5**
   - верный ответ без обоснования **0**
2. **задача**
   - получил одну верную линейную связь между x и y **0.5**
   - перешел к равносильной линейной или полулинейной системе и верно решил ее **1.0**
   - верно отобрал корни и посчитал количество **1.5**
   - все предыдущее + верный ответ на второй вопрос **2.0**
   - верный ответ на первый и/или второй вопрос задачи без обоснования **0-0.5**
3. **задача**
   - какие-то начальные рассуждения по поводу формулы полной вероятности и попытка записать реккурентные формулы **0.5**
   - расчет вероятностей на каждом шаге **1.0-1.5**
   - верный обоснованный ответ **2.0**
   - арифметические ошибки при суммировании полной вероятности или на отдельных шагах **1.0-1.5**
   - верный ответ без обоснования **0**
4. **задача**
   - составил уравнения, описывающие изменения отношений объемов **0.5**
   - упростил систему и связал отношение объемов с произведением просты чисел, данных в условии **1.0**
   - получил обоснованный верный ответ **2.0**
   - неверный ответ при полном обосновании или неполное обоснование **1.0-1.5**
   - верный ответ без обоснования **0**
5. **задача**
   - догадался разделить числа на логарифмы четных и нечетных или составил какое-то выражение из этих чисел , которое будет модифицироваться на последующих шагах **0.5**
   - сделал начальные оценки разности сумм или составленного выражения и описал алгоритм перемещения чисел **1.0**
   - полностью обосновал верный ответ **2.0**
   - недостаточное обоснование при правильно описанном алгоритме **1.5**
   - верный ответ без обоснования **0**
6. **задача**
   - содержательный рисунок **0.5**
   - составил целевую функцию **1.0**
   - верно нашел экстремум на отрезке **2.0**
   - арифметические или логические ошибки при исследовании на экстремум **1.0-1.5**
   - верный ответ без обоснования **0**

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом», математика, март 2022, 11 класс (комплект №2)
Вариант № 1

1. Клиенты интернет магазина «Али-экспресс» проживают в семи домах, расположенных в вершинах выпуклого семиугольника. От жителей первого дома поступил один заказ, от второго дома – два заказа, и т.д. от жителей шестого – шесть заказов. А вот жители последнего седьмого дома сделали 21 заказ. Менеджер магазина задумался о том, в какое место следует доставить все заказы, чтобы суммарное расстояние, преодолеваемое всеми клиентами для получения товара, было минимально возможным. Помогите ему в решении этой задачи и обоснуйте результат.

2. Найти все числа C, для которых неравенство $\left|\alpha \sin x + \beta \cos 2x\right| \le C$ выполняется при всех x и любых $(\alpha;\beta)$ таких, что $\alpha^2+\beta^2 \le 4$.

3. Члены последовательности a_n удовлетворяют соотношению: $a_{n+2} = a_n - \dfrac{2}{a_{n+1}}$, $a_1 = 8, a_2 = 19$. Найти n, для которого $a_n = 0$.

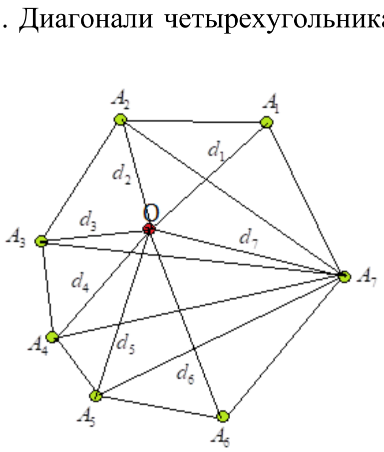
4. Петя бросает несколько раз на стол игральный кубик и считает сумму очков, выпавших на его верхней грани. Для любого натурального числа n событие A_n наступает, если эта сумма равна n. Найти вероятность события A_{11}.

5. На плоскости отмечено множество точек M, координаты x и y которых связаны соотношением

$$\sin(2x+3y) = \sin 2x + \sin 3y.$$

Круг радиуса R, расположенный на той же плоскости, не пересекается с множеством M. Какие значения может принимать радиус такого круга?

6. Точка M лежит на ребре AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. В квадрат $ABCD$ вписан прямоугольник $MNLK$ так, что одной из его вершин является точка M, а три другие расположены на различных сторонах квадрата основания. Прямоугольник $M_1N_1L_1K_1$ является ортогональной проекцией прямоугольника $MNLK$ на плоскость верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$. Диагонали четырехугольника MK_1L_1N перпендикулярны. Найти отношение $AM : MB$.



Задача 1 Ответ: товары следует доставить в седьмой дом.

Решение:

Пусть O–произвольная точка привоза товара,
$d_1, d_2, ..., d_7$ – расстояния от точки привоза до домов;
Суммарное расстояние:
$$\Sigma = 1\cdot d_1 + 2d_2 + 3d_3 + 4d_4 + 5d_5 + 6d_6 + 21d_7 = (d_1+d_7) + 2(d_2+d_7$$
$$+4(d_4+d_7) + 5(d_5+d_7) + 6(d_6+d_7)$$

Из неравенства треугольника:

$$d_1 + d_7 \geq A_7A_1,\quad d_2 + d_7 \geq A_7A_2,\quad d_3 + d_7 \geq A_7A_3,\quad d_4 + d_7 \geq A_7A_4$$
$$d_5 + d_7 \geq A_7A_5 \quad d_6 + d_7 \geq A_7A_6 \qquad (1)$$

Равенство достигается только в случае, когда треугольник вырождается в отрезок.

$$\Sigma \geq A_7A_1 + 2\cdot A_7A_2 + 3\cdot A_7A_3 + 4\cdot A_7A_4 + 5\cdot A_7A_5 + 6\cdot A_7A_6 \qquad (2)$$

Правая часть неравенства (2) не зависит от положения точки O, поэтому

$$\min\Sigma \geq A_7A_1 + 2\cdot A_7A_2 + 3\cdot A_7A_3 + 4\cdot A_7A_4 + 5\cdot A_7A_5 + 6\cdot A_7A_6$$

Минимум достигается, когда точка O совпадает с точкой C, поскольку в ней все неравенства (1) превращаются в равенство.

Задача 2 Ответ: $C \geq 2\sqrt{2}$

Решение:

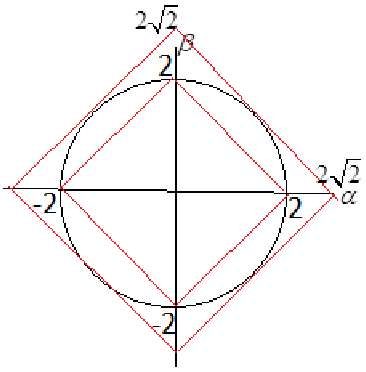
$$f(x) = |\alpha\sin x + \beta\cos 2x| \leq |\alpha||\sin x| + |\beta||\cos 2x| \leq |\alpha| + |\beta|$$

Покажем, что значение $|\alpha| + |\beta|$ всегда достижимо для функции $f(x)$ при любых $(\alpha;\beta)$:

1. Если α и β одного знака, то $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = |-\alpha - \beta| = |\alpha| + |\beta|$;

2. Если α и β разных знаков, то $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = |\alpha - \beta| = |\alpha| + |\beta|$

Таким образом, при фиксированных $(\alpha;\beta)$ $\max\limits_{x\in R} f(x) = |\alpha| + |\beta|$. Величина $|\alpha| + |\beta|$ принимает наибольшее значение в круге $\alpha^2 + \beta^2 \leq 4$ равное $2\sqrt{2}$.



Итак, при любых $(\alpha;\beta)$ в круге $\alpha^2 + \beta^2 \leq 4$ и любых x справедливо неравенство $f(x) = |\alpha\sin x + \beta\cos 2x| \leq 2\sqrt{2}$ и любое $C < 2\sqrt{2}$ не удовлетворяет условию задачи, а $C \geq 2\sqrt{2}$ искомое.

Задача 3. Ответ: $n = 78$

Решение:

По условию $a_1, a_2 \neq 0$. Элементы последовательности определены пока $a_{n+1} \neq 0$. Для остальных номеров члены последовательности не определены. Пусть $a_{n+1} \neq 0,\ a_{n+2} = 0$. Тогда для всех $k \leq n \Rightarrow$ $a_{k+2}a_{k+1} = a_{k+1}a_k - 2$. Последовательность $b_k = a_{k+1}a_k$ удовлетворяет соотношению $b_{k+1} = b_k - 2$ и представляет собой арифметическую прогрессию с разностью $d = -2$ и первым членом $b_1 = a_2a_1 = 8\cdot 19 = 152$. Общий ее член $b_k = b_1 - 2(k-1)$ равен нулю, если $2(k-1) = 152 \Rightarrow$ $k = 77 \Rightarrow b_{77} = a_{77}\cdot a_{78} = 0 \Rightarrow a_{78} = 0$

Задача 4 Ответ:

$$P\left(A\right)=\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{2}{6^2}+\frac{27}{6^3}+\frac{104}{6^4}+\frac{205}{6^5}+\frac{252}{6^6}+\frac{210}{6^7}+\frac{120}{6^8}+\frac{45}{6^9}+\frac{10}{6^{10}}+\frac{1}{6^{11}}\right)=\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{7^{10}}{6^{11}}-11\frac{7^3}{6^5}\right)$$

Решение

Если $n\geq 7$, то перед последним броском, реализующим событие A_n, должно быть реализовано одно из шести несовместных событий $A_{n-1}, A_{n-2}, A_{n-3}, A_{n-4}, A_{n-5}, A_{n-6}$. Тогда

$$A_n = B_1\cdot A_{n-1}+B_2\cdot A_{n-2}+B_3\cdot A_{n-3}+B_4\cdot A_{n-4}+B_5\cdot A_{n-5}+B_6\cdot A_{n-6}, \qquad (3)$$

где $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ – независимые события выпадения 1,2,3,4,5,6 при последнем броске, $P(B_k)=p=\frac{1}{6}$ при всех $k=1,2,3,4,5,6$

С учетом независимости и несовместности событий, из (3) следует рекуррентная формула для определения вероятности $P\left(A_n\right)$:

$$P(A_n)=\frac{1}{6}\left(P(A_{n-1})+P(A_{n-2})+P(A_{n-3})+P(A_{n-4})+P(A_{n-5})+P(A_{n-6})\right) \qquad (4)$$

В следующую таблицу занесены вероятности событий, состоящих в том, что при бросании кубика k раз выпало суммарно n очков (ради удобства написаны только числители дробей, знаменатель в каждой строке равен 2^{-k}, при заполнении используется соотношение (4), причем если событие не определено или невозможно, его вероятность равна нулю)

$k\setminus n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2
3	0	0	0	1	3	6	10	15	21	25	27	27
4	0	0	0	0	1	4	10	20	35	56	80	104
5	0	0	0	0	0	1	5	15	35	70	126	205
6	0	0	0	0	0	0	1	6	21	56	126	252
7	0	0	0	0	0	0	0	1	7	28	84	210
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	8	36	120
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	45
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	10
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Имеет смысл бросать кубик от двух до одиннадцати раз. Считаем, что любое количество бросаний в этом диапазоне равновероятно. Тогда вероятность того, что при бросании кубика от двух до одиннадцати раз выпадет суммарно 11 очков равна

$$P\left(A\right)=\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{2}{6^2}+\frac{27}{6^3}+\frac{104}{6^4}+\frac{205}{6^5}+\frac{252}{6^6}+\frac{210}{6^7}+\frac{120}{6^8}+\frac{45}{6^9}+\frac{10}{6^{10}}+\frac{1}{6^{11}}\right)=\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{7^{10}}{6^{11}}-11\frac{7^3}{6^5}\right)$$

Задача 5 Ответ: $R\in\left(0;\frac{5-\sqrt{13}}{6}\pi\right)$

Решение:

Преобразование:

$$2\sin\frac{2x+3y}{2}\cos\frac{2x+3y}{2}=2\sin\frac{2x+3y}{2}\cos\frac{2x-3y}{2}\to$$

$$\to 2\sin\frac{2x+3y}{2}\left(\cos\frac{2x+3y}{2}-\cos\frac{2x-3y}{2}\right)=-4\sin\frac{2x+3y}{2}\sin\frac{3y}{2}\sin x=0$$

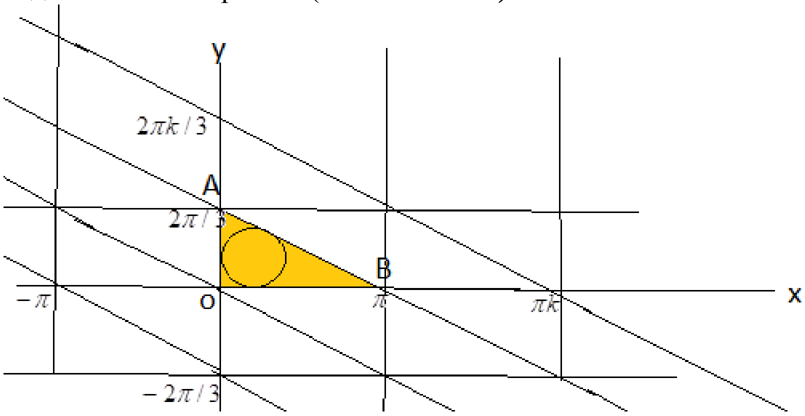
Случай 1. $\sin\frac{2x+3y}{2}=0 \quad \to 2x+3y=2\pi k,\ k\in Z \qquad (5)$

Семейство прямых на плоскости с уравнениями (5) принадлежат множеству M.

Случай 2. $\sin\frac{3y}{2}=0$, x – любое. $\sin\frac{3y}{2}=0 \to y=\frac{2\pi k}{3}, k\in Z$ (6)

Семейство горизонтальных прямых на плоскости с уравнениями (6) принадлежат множеству M.
Случай 3. $\sin x=0,\ y$ – любое. $x=\pi k, k\in Z$ (7)

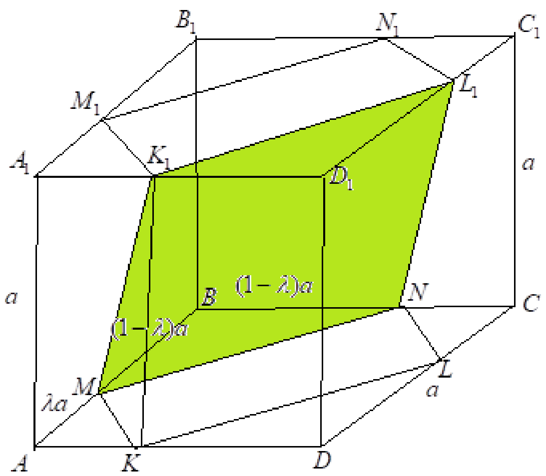
Семейство вертикальных прямых на плоскости с уравнениями (7) принадлежат множеству M.
На рис изображено объединение этих прямых (множество M):



Семейство прямых разбивает плоскость на равные прямоугольные треугольники с катетами π и $\frac{2\pi}{3}$. Радиус круга, вписанного в треугольник OAB, равен $\frac{5-\sqrt{13}}{6}\pi$. Если радиус круга, не имеющего с M общих точек, имеет радиус $R\geq\frac{5-\sqrt{13}}{6}\pi$, то его центр принадлежит одному из треугольников разбиения, а окружность его границы имеет общие точки со сторонами треугольника. Таким образом, радиус такой окружности меньше радиуса вписанной окружности.

Задача 6 Ответ: $AM:MB=1:3$

Решение:



Стороны прямоугольника $MNLK$ параллельны диагоналями основания $ABCD$. Стороны K_1L_1 и MN равны и параллельны, поэтому четырехугольник MK_1L_1N параллелограмм. Угол K_1MK прямой (теорема о трех перпендикулярах), поэтому MK_1L_1N – прямоугольник. Его диагонали по условию перпендикулярны, поэтому MK_1L_1N – квадрат. Пусть a – ребро куба, $AM=\lambda a$ с неизвестным λ.

Вычисления:

$$MK=\lambda a\sqrt{2},\ K_1M^2=MK^2+KK_1^2=2\lambda^2a^2+a^2=a^2\left(2\lambda^2+1\right)$$

$$MN=(1-\lambda)a\sqrt{2}\to 2(1-\lambda)^2a^2=a^2\left(2\lambda^2+1\right)\to\lambda=\frac{1}{4}$$

$$AM=\frac{a}{4},\ MB=\frac{3a}{4}\to AM:MB=1:3$$

Замечание: в общем случае можно так вписать прямоугольник в квадрат таким образом, чтобы все его вершины находились на равных расстояниях от вершин квадрата. Легко заметить что в условиях данной задачи такой случай не реализуется.

Вариант № 2

1. Клиенты интернет магазина «Али-экспресс» проживают в шести домах, расположенных в вершинах выпуклого шестиугольника. От жителей первого дома поступил один заказ, от второго дома – два заказа, и т.д. от жителей пятого – пять заказов. А вот жители последнего шестого дома сделали 15 заказов. Менеджер магазина задумался о том, в какое место следует доставить все заказы, чтобы суммарное расстояние, преодолеваемое всеми клиентами для получения товара, было минимально возможным. Помогите ему в решении этой задачи и обоснуйте результат.

Ответ: товары следует доставить в шестой дом

2. Найти все числа C, для которых неравенство $\left|\alpha\sin x+\beta\cos 4x\right|\le C$ выполняется при всех x и любых $\left(\alpha;\beta\right)$ таких, что $\left|\alpha\right|\le 1,\left|\beta\right|\le 1$.

Ответ: $C\ge 2$

3. Члены последовательности a_n удовлетворяют соотношению: $a_{n+2}=a_n-\dfrac{3}{a_{n+1}},\quad a_1=9,a_2=17$. Найти n, для которого $a_n=0$

Ответ: $n=53$

4. Петя бросает несколько раз на стол игральный кубик и считает сумму выпавших на нем очков. Для любого натурального числа n событие A_n наступает, если эта сумма равна n. Найти вероятность события A_{10}.

Ответ: $P\left(A\right)=\dfrac{1}{9}\cdot\left(\dfrac{3}{6^2}+\dfrac{27}{6^3}+\dfrac{80}{6^4}+\dfrac{126}{6^5}+\dfrac{126}{6^6}+\dfrac{84}{6^7}+\dfrac{36}{6^8}+\dfrac{9}{6^9}+\dfrac{1}{6^{10}}\right)$

5. На плоскости отмечено множество точек M, координаты x и y которых связаны соотношением

$$\sin(x+2y)=\sin x+\sin 2y.$$

Круг радиуса R, расположенный на той же плоскости, не пересекается с множеством M.

Какие значения может принимать радиус такого круга?

Ответ: $R\in\left(0;\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\pi\right)$

6. Точка M лежит на ребре AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. В квадрат $ABCD$ вписан прямоугольник $MNLK$ так, что одной из его вершин является точка M, а три другие расположены на различных сторонах квадрата основания. Прямоугольник $M_1N_1L_1K_1$ является ортогональной проекцией прямоугольника $MNLK$ на плоскость верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$. Диагонали четырехугольника MK_1L_1N образуют с прямой MN угол 60^0. Найти отношение $AM:MB$.

Ответ: $AM:MB=1$

Вариант № 3

1. Клиенты интернет магазина «Али-экспресс» проживают в пяти домах, расположенных в вершинах выпуклого пятиугольника. От жителей первого дома поступил один заказ, от второго дома – два заказа, и т.д. от жителей четвертого – четыре заказа. А вот жители последнего пятого дома сделали 10 заказов. Менеджер магазина задумался о том, в какое место следует доставить все заказы, чтобы суммарное расстояние, преодолеваемое всеми клиентами для получения товара, было минимально возможным. Помогите ему в решении этой задачи и обоснуйте результат.

Ответ: товары следует доставить в пятый дом.

2. Найти все числа C, для которых неравенство $|\alpha\sin x+\beta\cos 6x|\le C$ выполняется при всех x и любых $(\alpha;\beta)$ таких, что $|\alpha|\le 2,|\ \beta|\le 1$.

Ответ: $C\ge 3$

3. Члены последовательности a_n удовлетворяют соотношению: $a_{n+2}=a_n-\dfrac{4}{a_{n+1}},\ a_1=8,\ a_2=31.$

Найти n, для которого $a_n=0$

Ответ: $n=64$

4. Петя бросает несколько раз на стол игральный кубик и считает сумму выпавших на нем очков. Для любого натурального числа n событие A_n наступает, если эта сумма равна n. Найти вероятность события A_9.

Ответ: $P(A)=\dfrac{1}{8}\cdot\left(\dfrac{4}{6^2}+\dfrac{25}{6^3}+\dfrac{56}{6^4}+\dfrac{70}{6^5}+\dfrac{56}{6^6}+\dfrac{28}{6^7}+\dfrac{8}{6^8}+\dfrac{1}{6^9}\right)$

5. На плоскости отмечено множество точек M, координаты x и y которых связаны соотношением

$$\sin(3x+4y)=\sin 3x+\sin 4y.$$

Круг радиуса R, расположенный на той же плоскости, не пересекается с множеством M.

Какие значения может принимать радиус такого круга?

Ответ: $R\in\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$

6. Точка M лежит на ребре AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. В квадрат $ABCD$ вписан прямоугольник $MNLK$ так, что одной из его вершин является точка M, а три другие расположены на различных сторонах квадрата основания. Прямоугольник $M_1N_1L_1K_1$ является ортогональной проекцией прямоугольника $MNLK$ на плоскость верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$. Отношение длин сторон MK_1 и MN четырехугольника MK_1L_1N равно $\sqrt{54}:8$. Найти отношение $AM:MB$.

Ответ: $AM:MB=1:4$

Вариант № 4

1. Клиенты интернет магазина «Али-экспресс» проживают в четырех домах, расположенных в вершинах выпуклого четырехугольника. От жителей первого дома поступил один заказ, от второго дома – два заказа, от жителей третьего – три заказа. А вот жители последнего четвертого дома сделали 6 заказов. Менеджер магазина задумался о том в какое место следует доставить все заказы, чтобы суммарное расстояние, преодолеваемое всеми клиентами для получения товара, было минимально возможным. Помогите ему в решении этой задачи и обоснуйте результат.

Ответ: товары следует доставить в четвертый дом.

2. Найти все числа C, для которых неравенство $\left|\alpha\sin 2x+\beta\cos 8x\right|\le C$ выполняется при всех x и любых $(\alpha;\beta)$ таких, что $\alpha^2+\beta^2\le 16$.

Ответ: $C\ge 4\sqrt{2}$

3. Члены последовательности a_n удовлетворяют соотношению: $a_{n+2}=a_n-\dfrac{5}{a_{n+1}}$, $a_1=10$, $a_2=23$.

Найти n, для которого $a_n=0$

Ответ: $n=48$

4. Петя бросает несколько раз на стол игральный кубик и считает сумму выпавших на нем очков. Для любого натурального числа n событие A_n наступает, если эта сумма равна n. Найти вероятность события A_8.

Ответ: $P(A)=\dfrac{1}{7}\cdot\left(\dfrac{5}{6^2}+\dfrac{21}{6^3}+\dfrac{35}{6^4}+\dfrac{35}{6^5}+\dfrac{21}{6^6}+\dfrac{7}{6^7}+\dfrac{1}{6^8}\right)$

5. На плоскости отмечено множество точек M, координаты x и y которых связаны соотношением

$$\sin(12x+5y)=\sin 12x+\sin 5y.$$

Круг радиуса R, расположенный на той же плоскости, не пересекается с множеством M.

Какие значения может принимать радиус такого круга?

Ответ: $R\in\left(0;\dfrac{\pi}{15}\right)$

6. Точка M лежит на ребре AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. В квадрат $ABCD$ вписан прямоугольник $MNLK$ так, что одной из его вершин является точка M, а три другие расположены на различных сторонах квадрата основания. Прямоугольник $M_1N_1L_1K_1$ является ортогональной проекцией прямоугольника $MNLK$ на плоскость верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$. Плоскость четырехугольника MK_1L_1N образует с плоскостью основания куба угол $\alpha : \cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{11}}$. Найти отношение $AM : MB$

Ответ: $AM : MB = 1:2$

Критерии проверки финал Росатом 11 класс

1. **задача**
   - верный ответ без обоснования **0**
   - верный ответ с неясными , но частично верными комментариями **0.5**
   - составил верно неравенства (или имеются верные рассуждения по поводу решения этой системы неравенств) , показал, что ответ не зависит от выбора точки внутри **1.0 -1.5**
   - решил задачу верно с полным обоснованием **2.0**
2. **задача**
   - верный ответ на вопрос задачи без разумного обоснования **0-0.5**
   - нашел граничные значения α и β **1.0**
   - оценил максимальное значение модуля, привел пример реализации максимума **1.5**
   - все предыдущее + верный ответ с **2.0**
3. **задача**
   - верный ответ без обоснования **0**
   - какие-то начальные рассуждения по поводу преобразования рекуррентных формул **0.5**
   - расчет нескольких значений членов последовательности **1.0**
   - уловил закономерность или получил общую формулу для κ , арифметические ошибки при вычислениях или на отдельных шагах **1.5**
   - верный обоснованный ответ **2.0**
4. **задача**
   - попытки ответа без обоснования или с явным непониманием основ вероятности **0**
   - вычислил несколько вероятностей для небольшого количества бросков **0.5 - 1.0**
   - получил правильные рекуррентные соотношения и сумел ими воспользоваться , или вычислил с мелкими ошибками все возможные вероятности **1.0 -1.5**
   - неверный ответ при полном обосновании или неполное обоснование **1.0-1.5**
   - получил обоснованный верный ответ **2.0**
5. **задача**
   - верный ответ без обоснования **0**
   - частично преобразовал тригонометрическое уравнение **0.5**
   - частично получил верные серии для x и y , нарисовал графически систему прямоугольников **1.0**
   - правильно получил решения , построил систему треугольников, небольшие ошибки при вычислении радиуса вписанной окружности **1.5**
   - полностью обосновал верный ответ **2.0**
6. **задача**
   - верный ответ без обоснования **0**
   - содержательный правильный рисунок **0.5**
   - небольшие арифметические или геометрические ошибки , обосновал, что в сечении прямоугольник **1.0-1.5**
   - правильное обоснование, верно нашел отношение длин отрезков **2.0**