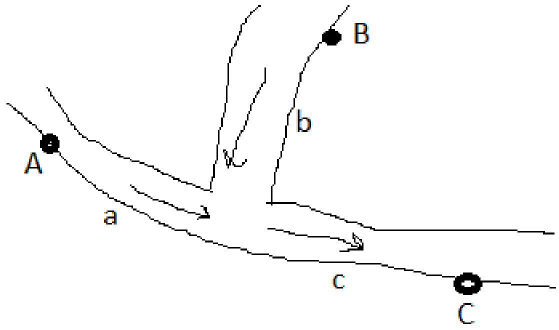
10 класс

Вариант 1

Задача 1. Ответ: расстояние пункта С от устья притока не менее 4 км.

Решение.



Обозначения: a, b и c – расстояния пунктов A, B и C от устья притока, v – собственная скорость байдарки, w – скорость течения, T_k – время плавания по маршруту, k – номер маршрута. Возможны шесть вариантов маршрута:

Маршрут 1. $A \to B \to C$

$$T_1 = \frac{a}{v+w} + \frac{b}{v-w} + \frac{b+c}{v+w} = \frac{a+b+c}{v+w} + \frac{b}{v-w}$$

Маршрут 2. $A \to C \to B$

$$T_2 = \frac{a+c}{v+w} + \frac{b+c}{v-w}$$

Маршрут 3. $B \to A \to C$

$$T_3 = \frac{b}{v+w} + \frac{a}{v-w} + \frac{a+c}{v+w} = \frac{a+b+c}{v+w} + \frac{a}{v-w}$$

Маршрут 4. $B \to C \to A$

$$T_4 = \frac{b+c}{v+w} + \frac{a+c}{v-w}$$

Маршрут 5. $C \to A \to B$

$$T_5 = \frac{a+c}{v-w} + \frac{a}{v+w} + \frac{b}{v-w} = \frac{a+b+c}{v-w} + \frac{a}{v+w}$$

Маршрут 6. $C \to B \to A$

$$T_6 = \frac{b}{v+w} + \frac{b+c}{v-w} + \frac{a}{v-w} = \frac{a+b+c}{v-w} + \frac{b}{v+w}$$

Если выбран маршрут 1, то c находится из системы $\begin{cases} T_1 \le T_n \\ n = 2,3,4,5,6 \end{cases}$ при заданных $a = 20, b = 19$.

Задача 2. Ответ: 8

Решение. Обозначение:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,\ a_k \in Z, a_k \ge 0,\ k = 0,1,\ldots,n$$

По условию,

$$P(3) = 50 = a_0 \cdot 3^n + a_1 \cdot 3^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot 3 \cdot + a_n .$$

С учетом положительности коэффициентов из этого следует, что при $n \ge 1$ справедливо неравенство $a_k < 50$ для всех k.

По условию,

$$P(50) = 12552 = a_0 \cdot 50^n + a_1 \cdot 50^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot 50 + a_n$$

Остатки от деления правой и левой частей равенства на 50 равны 2 и a_n, т.е. $a_n = 2$, а неполные частные равны 251 и $a_0 \cdot 50^{n-1} + a_1 \cdot 50^{n-2} + ... + a_{n-1}$, т.е.

$$251 = a_0 \cdot 50^{n-1} + a_1 \cdot 50^{n-2} + ... + a_{n-1}.$$

Остатки от деления правой и левой частей равенства на 50 равны 1 и a_{n-1}, т.е. $a_{n-1} = 1$, а неполные частные равны 5 и $a_0 \cdot 50^{n-2} + a_1 \cdot 50^{n-3} + ... a_{n-2}$, т.е. $5 = a_{n-2}$, а неполное частное равно нулю. Последнее бывает при коэффициентах

$$a_n = a_{n-1} = ... = a_{n-3} = 0.$$

Таким образом, искомый многочлен

$$P(x) = 5x^2 + x + 2.$$

Задача 3. Ответ: 6.
Решение.
Случай 1. При включении горят лампочки 1 и 2 .
Две неисправные лампочки находятся среди лампочек с номерами 3, 4,5. Выбор пары лампочек из трех можно осуществит тремя способами и с каждой выбранной парой нужно проделать две операции по замене пары на исправную с последующей проверкой включением сети. Всего 6 операций.
Случай 2. При включении горят лампочки 3, 4, 5.
Обе лампочки 1 и 2 неисправные. Их замена на исправные – две операции.
Случай 3. При включении не горит ни одной лампочки.
Среди лампочек 1,2 одна неисправная и среди лампочек 3,4,5 также одна неисправная. Для обнаружения неисправной лампы в цепи 1 – 2 и ее замены нужно 2 операции: 1) замена лампы под номером 1 и включение сети; 2) если не горит цепь 1 -2, то замена лампы под номером 2.
Для исправления аварии в цепи 3 – 4 – 5 необходимо проделать три операции:
1) проверка лампочки 3;
2) если при включении сети лампочки в цепи3 –4– 5 не горят, проверить лампу 4;
3) если включение сети не привело к загоранию цепи3 – 4 – 5, то неисправная лампа 5 и ее надо заменить. Всего в случае 3 нужно произвести 5 операций.
Наименьшее число операций, обеспечивающий безусловный ремонт осветительной системы, равен наибольшему числу операций в каждом из рассмотренных случаев, т.е. шести.

Задача 4. Ответ: $\alpha = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$; $\beta = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

Решение. Находим координаты точек пересечения окружности и прямой:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + 2y - 1 - \sqrt{3} = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = \cos\varphi, y = \sin\varphi \\ \sin\varphi + \cos\varphi = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) \end{cases} \to$$

$$\to \sqrt{2}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \to \begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k \\ \varphi_2 = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi m \end{cases} \to$$

$$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right), \; D\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Обозначение: $A(\sin\alpha; \sin 2\beta)$, $B(\sin\beta; \cos 2\alpha)$.

Случай 1. $A=C,\ B=D$

$$\begin{cases} \sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 2\beta=\dfrac{1}{2} \\ \sin\beta=\dfrac{1}{2} \\ \cos 2\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \to \cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = -\frac{1}{2} \neq \frac{\sqrt{3}}{2} \to \varnothing$$

Случай 2. $A=D,\ B=C$

$$\begin{cases} \sin\alpha=\dfrac{1}{2} \\ \sin 2\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 2\alpha=\dfrac{1}{2} \end{cases} \to \begin{cases} \alpha=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z \\ \beta=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z \end{cases}$$

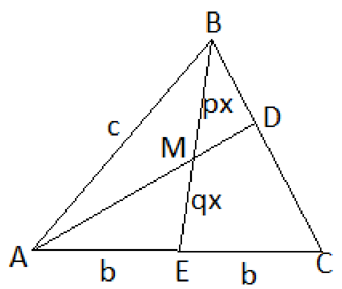
Задача 5. Ответ: $BD=3$.

Вариант 0

В треугольнике ABC длина стороны AC равна $2b$, стороны AB $-c$, а угол при вершине A – 60^0. Точка M, расположенная на медиане BE, делит ее в отношении $BM:ME=p:q$. Прямая AM пересекает сторону BC в точке D. Найти длину отрезка BD.

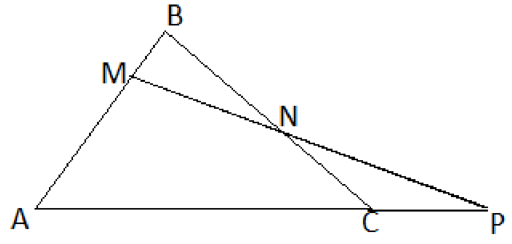
Ответ: $BD=\dfrac{p}{p+2q}\cdot\sqrt{4b^2+c^2-2bc}$

Решение.



По т. Косинусов находим длину стороны BC: $BC^2=4b^2+c^2-2bc$.

Теорема Менелая:



Треугольник ABC и секущая MP – произвольные: $\dfrac{AM}{MB}\cdot\dfrac{BN}{NC}\cdot\dfrac{CP}{PA}=1$

Вычисления:

$$\frac{\sqrt{4b^2+c^2-2bc}-BD}{BD}\cdot\frac{px}{qx}\cdot\frac{1}{2}=1\to\sqrt{4b^2+c^2-2bc}-BD=\frac{2q}{p}\cdot BD\to$$

$$\to BD=\frac{p}{p+2q}\cdot\sqrt{4b^2+c^2-2bc}$$

В варианте 1

$$b=4, c=3, p=3, q=2\to\sqrt{4b^2+c^2-2bc}=\sqrt{64+9-24}=7\to BD=\frac{3}{3+4}\cdot 7=3.$$

Вариант 2

Задача 1. Ответ: расстояние пункта С от устья притока не более 5 км.

Задача 2. Ответ: 18.

Задача 3. Ответ: 12.

Задача 4. Ответ: $\alpha=\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z, \beta=\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z.$

Решение. Точки пересечения окружности и прямой: $C\left(\frac{1}{2};1\right)$, $D\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Обозначение: $A(\cos\beta;\sin 2\alpha)$, $B(\sin 3\alpha;\sin 2\beta)$

Случай 1. $A=C, B=D$

$$\begin{cases}\cos\beta=\frac{1}{2}\\ \sin 2\alpha=1\\ \sin 3\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin 2\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\to\begin{cases}\alpha=\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z\\ \beta=\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z\end{cases}$$

Случай 2. $A=D, B=C$

$$\begin{cases}\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin 2\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin 3\alpha=\frac{1}{2}\\ \sin 2\beta=1\end{cases}\to\varnothing$$

Задача 5 Ответ: $BD=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Решение. В варианте 2

$$b=3, c=4, p=2, q=3\to\sqrt{4b^2+c^2-2bc}=\sqrt{36+16-24}=2\sqrt{7}\to BD=\frac{2}{2+6}\cdot 2\sqrt{7}=\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Вариант 3

Задача 1. Ответ: расстояние пункта С от устья притока не менее $\frac{24}{5}$ км.

Задача 2. Ответ: $P(x)=2x^2+x+1$.

Задача 3. Ответ: 13.

Задача 4. Ответ: $\begin{cases} \alpha = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z \\ \beta = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z \end{cases}, \begin{cases} \alpha = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z \\ \beta = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \end{cases}$

Решение. Точки пересечения окружности и прямой: $C\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $D\left(0;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Обозначение: $A(\cos 2\alpha;\cos\beta)$, $B(\cos 2\beta;\cos\alpha)$.

Случай 1. $A = C, B = D$

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = \dfrac{1}{2} \\ \cos\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 2\beta = 0 \\ \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \to \begin{cases} \alpha = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z \\ \beta = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z \end{cases}$$

Случай 2. $A = D, B = C$

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = 0 \\ \cos\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 2\beta = \dfrac{1}{2} \\ \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \to \begin{cases} \alpha = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z \\ \beta = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \end{cases}$$

Задача 5 Ответ: $BD = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$

Решение.

$$b = 4, c = 6, p = 2, q = 5 \to \sqrt{4b^2 + c^2 - 2bc} = \sqrt{64 + 36 - 48} = 2\sqrt{13} \to BD = \frac{2}{2+10}\cdot 2\sqrt{13} = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

Вариант 4

Задача 1. Ответ: расстояние пункта С от устья притока не более 6 км.

Задача 2. Ответ: 3.

Задача 3. Ответ: 15.

Задача 4. Ответ: $\begin{cases} \alpha = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z \\ \beta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}, k \in Z \end{cases}$

Решение. Точки пересечения окружности и прямой: $C\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$, $D\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Обозначение: $A(\cos 2\alpha;\cos 2\beta)$, $B(\cos 2\beta;\cos\alpha)$

Случай 1. $A = C, B = D$

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = -\dfrac{1}{2} \\ \cos 2\beta = 0 \\ \cos 2\beta = 0 \\ \cos\alpha = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \to \begin{cases} \alpha = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z \\ \beta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}, k \in Z \end{cases}$$

Случай 2. $A = D, B = C$

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = 0 \\ \cos 2\beta = -\dfrac{1}{2} \\ \cos 2\beta = -\dfrac{1}{2} \\ \cos\alpha = 0 \end{cases} \to \varnothing$$

Задача 5. Ответ: $BD = \dfrac{14}{5}$.

Решение.

$b = 4, c = 5, p = 4, q = 3 \to \sqrt{4b^2 + c^2 - 2bc} = \sqrt{64 + 25 - 40} = 7 \to BD = \dfrac{4}{4+6} \cdot 7 = \dfrac{14}{5}.$