## Заключительный тур финал, март 2022, 10 класс

**Вариант 1**

Задача 1 Ответ: 25 учеников

Решение. $m$ – число учеников команды «Знайки», $n$ – число учеников команды «Незнайки», $K$ - число пар «вопрос- ответ»

$21 \le m+n \le 28$

$$K = 3m = 2n \to \left[\begin{array}{c} m = 2t \\ n = 3t, t \in N \end{array}\right. \to m+n = 5t \to t = 5 \to m+n = 25$$

Задача 2 Ответ: $x_1 = \frac{1}{1011}\left(\frac{\pi}{3} + \pi m\right), m \in Z,\ x_2 = \frac{\pi m}{1011}, m \in Z, m \ne 1011k, k \in Z$

Решение. $x = \pi k, k \in Z$ не являются решениями уравнения, поскольку

$f(\pi k) = 0, g(\pi k) = 1011 \cdot (-1)^k$

Преобразования: умножим и разделим левую и правую части уравнения на $\sin x \ne 0$

$$\frac{\sin x(\sin x + \sin 3x + ... + \sin 2021x)}{\sin x} = \frac{\sqrt{3}\sin x(\cos x + \cos 3x + ... + \cos 2021x)}{\sin x}$$

$$\frac{(1-\cos 2x)}{2} + \frac{(\cos 2x - \cos 4x)}{2} + ... + \frac{(\cos 2020x - \cos 2022x)}{2} =$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{\sin 2x}{2} + \frac{(\sin 4x - \sin 2x)}{2} + ... + \frac{(\sin 2022x - \sin 2020x)}{2}\right) \to$$

$$\to \frac{1-\cos 2022x}{2} = \frac{\sqrt{3}\sin 2022x}{2} \to \sin^2 1011x = \sqrt{3}\sin 1011x \cdot \cos 1011x \to$$

$$\to \left[\begin{array}{l} \sin 1011x = 0 \\ tg 1011x = \sqrt{3} \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi m}{1011}, m \in Z, m \ne 1011k \\ x = \frac{1}{1011}\left(\frac{\pi}{3} + \pi m\right), m \in Z \end{array}\right.$$

Задача 3 Ответ: 46

Решение. Без ограничения общности $3 \le a \le b \le c$. Если $a > 6$, то $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ и таких троек нет.

Случай 1. $a = 3$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{6} \to \frac{1}{c} = \frac{1}{6} - \frac{1}{b} = \frac{b-6}{6b} \to c = \frac{6b}{b-6} = \frac{6(b-6)+36}{b-6} = 6 + \frac{36}{b-6}, b > 6$$

$b-6 = 1 \to b = 7 \to c = 42$

$b-6 = 2 \to b = 6 \to c = 24$

$b-6 = 3 \to b = 9 \to c = 18$

$b-6 = 4 \to b = 10 \to c = 15$

$b-6 = 6 \to b = 12 \to c = 12$

Случай 2. $a = 4$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{4} \to \frac{1}{c} = \frac{1}{4} - \frac{1}{b} = \frac{b-4}{4b} \to c = \frac{4b}{b-4} = \frac{4(b-4)+16}{b-4} = 4 + \frac{16}{b-4}, b > 4$$

$b-4 = 1 \to b = 5 \to c = 20$

$b-4 = 2 \to b = 6 \to c = 12$

$b-4 = 4 \to b = 8 \to c = 8$

Случай 3. $a = 5$

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{3}{10}\to\frac{1}{c}=\frac{3}{10}-\frac{1}{b}=\frac{3b-10}{10b}\to c=\frac{10b}{3b-10}\ge b\to 5\le b\le 6\to$$

$b=5\to c=10$

$b=6\to c\notin Z$

Случай 4. $a=6$

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{3}\to\frac{1}{c}=\frac{1}{3}-\frac{1}{b}=\frac{b-3}{3b}\to c=\frac{3b}{b-3}=\frac{3(b-3)+9}{b-3}=3+\frac{9}{b-3},b\ge a=6$$

$b-3=3\to b=6\to c=6$

Количество различных троек:

Каждая «упорядоченная» тройка с различными числами (их 6 штук)

$(3;7;42),(3;6;24),(3;9;18),(3;10;15),(4;5;20),(4;6;12)$

дает по 6 различных «неупорядоченных» троек (все перестановки). Таким образом, их 36.

Каждая «упорядоченная» тройка с двумя различными элементами (их 3 штуки)

$(3;12;12),(4;8;8),(5;5;10)$

дает по 3«неупорядоченных» троек (все перестановки). Таким образом, их 9.

Наконец, «упорядоченная» тройка $(6;6;6)$ единственная. Всего различных троек $46=36+9+1$

Задача 4 Ответ: 833 треугольника

Решение. Пусть $a,b,c\in Z$ длины сторон треугольника: $\begin{cases}1\le a\le b\le c\\ a+b>c\\ a+b+c=200\end{cases}$ (*)

Следствия из (*):

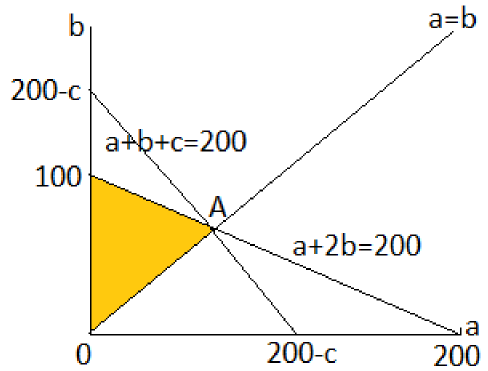
1) $200-c>c\to c<100$

2) $a+b\le 2b\to 200-c\le 2b\to b\ge 100-\frac{c}{2}$

Объединяя 1) и 2), получим $100-\frac{c}{2}\le b\le c$ (**)

3) $b\le c\to b\le 200-a-b\to a+2b\le 200$

Ограничения на величину $c$ :




На рис желтым отмечена область допустимых (по неравенствам) значений пар $(a;b)$

Значения С допустимы, если прямая $a+b=200-c$ пересекает желтую область. Координаты точки $A\left(\frac{200}{3};\frac{200}{3}\right)$ являются решениями линейной системы $\begin{cases}a=b\\ a+2b=200\end{cases}$. Прямой

$a+b=200-c$, проходящей через точку $A$, соответствует значение $c=c^*=\frac{200}{3}$. Допустимые значения $c\in\left(\frac{200}{3};100\right)$. С учетом целочисленности $c=67,68,...,99$.

Согласно (**) для каждого $c = 2k,\ k = 34, 35, \ldots 49$ (четные) число искомых треугольников равно числу целых $b$ на отрезке $\left[100 - \frac{c}{2}; c\right] = [100 - k; 2k]$, т.е. $3k - 99$. Их общее количество $m_1$ равно

$$m_1 = \sum_{k=34}^{k=49} (3k - 99) = 3 \cdot \frac{(34+49)\cdot 16}{2} - 16 \cdot 99 = 408$$

Если $c = 2k - 1,\ k = 34, 35, \ldots 50$ (нечетные), то число искомых треугольников равно числу целых $b$ на отрезке $\left[100 - \frac{c}{2}; c\right] = \left[100 - k + \frac{1}{2}; 2k - 1\right]$, т.е. $3k - 101$. Их общее число $m_2$ равно

$$m_2 = \sum_{k=34}^{k=50} (3k - 101) = 3 \cdot \frac{(34+50)\cdot 17}{2} - 17 \cdot 101 = 425$$

Итог: $m = m_1 + m_2 = 408 + 425 = 833$

Задача 5 Ответ: $N_6 N_7 = 5$

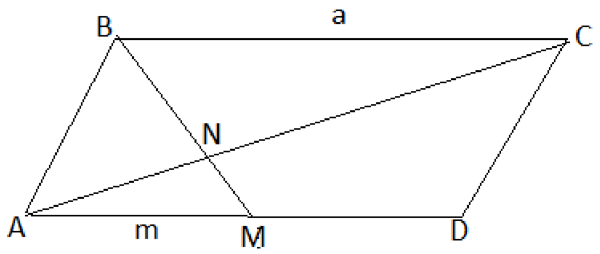
Решение. В варианте $n = 10, k = 7, b = 136 \rightarrow N_6 N_7 = \frac{10 \cdot 136}{16 \cdot 17} = 5$

Вариант 0

Основание $AD$ параллелограмма $ABCD$ разбито точками $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ на $n$ равных частей. Прямые $BM_1, BM_2, \ldots BM_{n-1}$ пересекают диагональ $AC$ в точках $N_1, N_2, \ldots, N_{n-1}$ соответственно. Найти длину k-ого по счету от вершины $A$ отрезка разбиения диагонали этими точками, если длина диагонали равна $b$ .

Ответ: $N_{k-1} N_k = \frac{nb}{(k+n-1)(k+n)}$

Решение.




Обозначения: $M$ – произвольная точка основания, $m$ – длина отрезка $AM$

Из подобия треугольников $ANM$ и $CNB$:

$$\frac{AN}{NC} = \frac{AM}{BC} = \frac{m}{a} \rightarrow \frac{m}{a} = \frac{AN}{b - AN} \rightarrow AN = \frac{m}{a+m} \cdot b \ (*)$$

Пусть $m = \frac{a}{n} \cdot k$ – длина отрезка $AM_k$ . Тогда длина отрезка $AN_k$ вычисляется по формуле (*):

$$AN_k = \frac{abk}{n\left(\frac{ak}{n} + a\right)} = \frac{k}{k+n} \cdot b$$

Длина k-ого по счету от вершины $A$ отрезка разбиения $N_{k-1} N_k$ равна:

$$N_{k-1} N_k = AN_k - AN_{k-1} = \frac{kb}{k+n} - \frac{(k-1)b}{k+n-1} = \frac{nb}{(k+n-1)(k+n)}$$

**Вариант 2**

Задача 1 Ответ: 21 ученик

Задача 2 Ответ: 1) $x_1 = \frac{2\pi m}{1009}, 2m \neq 1009 \cdot k, k \in Z$ ; 2) $x_2 = \frac{(2l+1)\pi}{1011}, 2l+1 \neq 1011 \cdot k, k \in Z$ ;

3) $x_3 = \frac{2\pi m}{1011}, 2m \neq 1011 \cdot k$ ; 4) $x_4 = \frac{(2l+1)\pi}{1009}, 2l+1 \neq 1009k$ .

Задача 3 Ответ: 39

Задача 4 Ответ: 469 треугольников

Задача 5 Ответ: $N_4 N_5 = 9$

**Вариант 3**

Задача 1 Ответ: 27 учеников

Задача 2 Ответ: 1) $x_1 = \pi k, k \in Z$ ; 2) $x_2 = \frac{\pi m}{2024}, m \neq 2024k, k \in Z$ .

Задача 3 Ответ: 12

Задача 4 Ответ: 208 треугольников

Задача 5 Ответ: $N_5 N_6 = 4$

**Вариант 4**

Задача 1 Ответ: 24 ученика

Задача 2 Ответ:1) $x_1 = \frac{\pi m}{1013}, m \in Z, m \neq 1013k, k \in Z$ ; 2) $x_2 = \frac{(4m-1)\pi}{4052}, 4m-1 \neq 4052 \cdot k, k \in Z$

Задача 3 Ответ: 25

Задача 4 Ответ: 65 треугольников

Задача 5 Ответ: $N_3 N_4 = 7$

# Критерии проверки финал Росатом 10 класс

1. **Задача**
   - Правильно записал систему -- 0,5 б.
   - Начал правильно решать, но ошибся (ответ неверный) -- 1.0
   - Правильный ход решения, но неверный ответ или мелкие ошибки -- 1.5
   - Полностью правильное решение и верный ответ -- 2.0

2. **Задача**
   - Правильно догадался умножить на sin x, или начал складывать в суммы из двух слагаемых с постоянной суммой аргументов, но далее не продвинулся, неверное решение -- 0.5
   - Нашел одну серию решений (не все) -- 1.0
   - Нашел обе серии, но не выбросил sin x=0, или мелкие ошибки -- 1.5
   - Полностью правильное решение и верный ответ -- 2.0

3. **Задача**
   - Увидел несколько частных случаев (менее 4, не все) -- 0.5
   - Нашел правильно ограничения на a(наименьшее число) , дальше не продвинулся, есть ошибки -- 1.0
   - Нашел правильно все наборы (a, b, c), ошибка в вычислении перестановок, есть ошибки -- 1.5
   - Полностью правильное решение и верный ответ -- 2.0

4. **Задача**
   - Правильно записал условия на соотношения сторон треугольника -- 0.5
   - Получил верную систему неравенств для сторон, но ее не решил -- 1.0
   - Правильный ход решения, но есть мелкие ошибки -- 1.5
   - Полностью правильное решение и верный ответ -- 2.0

5. **Задача**
   - Построил правильный рисунок, увидел подобие треугольников, или начал применять теорему Менелая, но маленькое продвижение -- 0.5
   - Правильно написал некоторые пропорции для сторон , но полного хода решения нет -- 1.0
   - Допустил небольшие вычислительные ошибки при правильном, в целом, решении -- 1.5
   - Полностью правильное решение и верный ответ -- 2.0