Заключительный тур олимпиады «Росатом»,
9 класс, Москва, март 2021

Вариант № 1

1. Команда из трех пиратов причалила к острову, чтобы разделить оставленный там клад золотых монет. Время было позднее, и они решили отложить дележ монет до утра. Первый пират проснулся ночью и решил забрать свою долю. Разделить монеты на три равные части ему не удалось, поэтому он забрал сначала одну монету, а потом треть от оставшихся и пошел спать. Не зная про это, второй пират проснулся ночью и проделал то же самое что и первый. Третий пират повторил то, что сделали первый и второй. Утром, не сказав друг другу ни слова, они разделили между собой поровну оставшиеся монеты. Сколько монет досталось каждому пирату, если первоначально клад содержал не менее 110 и не более 200 монет?

2. Сколько существует натуральных чисел k, для которых перевод обыкновенной дроби $\frac{2k+3}{2k}$ в десятичную приведет к конечной десятичной дроби с 100 знаками после запятой?

3. При каких натуральных n дробь $\frac{2}{n}$ может быть представлена периодической десятичной дробью вида $0,1(a_1a_2)$ с периодом, содержащим две различные цифры?

4. Рассматривается множество M целых чисел $n \in [-20;100]$, для которых выражение $A = n^3 + n^2 - 14n - 24$ делится на 7. Сколько целых чисел содержится в M? Найти наибольшее и наименьшее из них?

5. AM и BN – биссектрисы треугольника ABC. На прямой MN расположена точка P, удаленная от прямых AB и BC

на расстояния 4 и 1 соответственно. Найти расстояние от точки P до прямой AC.

Вариант № 2

1. Команда из четырех пиратов причалила к острову, чтобы разделить оставленный там клад золотых монет. Время было позднее, и они решили отложить дележ монет до утра. Первый пират проснулся ночью и решил забрать свою долю. Разделить монеты на четыре равные части ему не удалось, поэтому он забрал сначала одну монету, а потом четверть от оставшихся и пошел спать. Не зная про это, второй пират проснулся ночью и проделал то же самое что и первый. Третий и четвертый пираты повторили то, что сделали первый и второй. Утром, не сказав друг другу ни слова, они разделили между собой поровну оставшиеся монеты. Сколько монет досталось каждому пирату, если первоначально клад содержал не более 1000 монет?

2. Сколько существует натуральных чисел k, для которых перевод обыкновенной дроби $\dfrac{10k+2}{5k}$ в десятичную приведет к конечной десятичной дроби с 50 знаками после запятой?

3. При каких натуральных n дробь $\dfrac{3}{n}$ может быть представлена периодической десятичной дробью вида $0{,}1(a_1a_2)$ с периодом, содержащим две различные цифры?

4. Рассматривается множество M целых чисел $n \in [-100; 500]$, для которых выражение $A = n^3 + 2n^2 - 5n - 6$ делится на 11. Сколько целых чисел содержится в M? Найти наибольшее и наименьшее из них?

5. AM и BN – биссектрисы треугольника ABC. На прямой MN расположена точка P, удаленная от прямых AB и BC на расстояния 3 и 2 соответственно. Найти расстояние от точки P до прямой AC.

Вариант № 3

1. Команда из трех пиратов причалила к острову, чтобы разделить оставленный там клад золотых монет. Время было позднее, и они решили отложить дележ монет до утра. Первый пират проснулся ночью и решил забрать свою долю. Разделить монеты на три равные части ему не удалось, поэтому он забрал сначала две монеты, а потом треть от оставшихся и пошел спать. Не зная про это, второй пират проснулся ночью и проделал то же самое что и первый. Третий пират повторил то, что сделали первый и второй. Утром, не сказав друг другу ни слова, они разделили между собой поровну оставшиеся монеты. Сколько монет досталось каждому пирату, если первоначально клад содержал не менее 220 и не более 300 монет?

2. Сколько существует натуральных чисел k, для которых перевод обыкновенной дроби $\dfrac{15k+4}{5k}$ в десятичную приведет к конечной десятичной дроби с 22 знаками после запятой?

3. При каких натуральных n дробь $\dfrac{4}{n}$ может быть представлена периодической десятичной дробью вида $0{,}1(a_1a_2a_3)$ с периодом, содержащим хотя бы две различные цифры?

4. Рассматривается множество M целых чисел $n \in [-30;100]$, для которых выражение $A = n^3 + 4n^2 + n - 6$ делится на 5. Сколько целых чисел содержится в M? Найти наибольшее и наименьшее из них?

5. AM и BN – биссектрисы треугольника ABC. На прямой MN расположена точка P, удаленная от прямых AB и BC на расстояния 5 и 1 соответственно. Найти расстояние от точки P до прямой AC.

Вариант № 4

1. Команда из четырех пиратов причалила к острову, чтобы разделить оставленный там клад золотых монет. Время было позднее, и они решили отложить дележ монет до утра. Первый пират проснулся ночью и решил забрать свою долю. Разделить монеты на четыре равные части ему не удалось, поэтому он забрал сначала две монеты, а потом четверть от оставшихся и пошел спать. Не зная про это, второй пират проснулся ночью и проделал то же самое что и первый. Третий и четвертый пираты повторили то, что сделали первый и второй. Утром, не сказав друг другу ни слова, они разделили между собой поровну оставшиеся монеты. Сколько монет досталось каждому пирату, если первоначально клад содержал не менее 3000 и не более 4000 монет?

2. Сколько существует натуральных чисел k, для которых перевод обыкновенной дроби $\dfrac{8k+5}{2k}$ в десятичную приведет к конечной десятичной дроби с 48 знаками после запятой?

3. При каких натуральных n дробь $\dfrac{5}{n}$ может быть представлена периодической десятичной дробью вида $0{,}1(a_1 a_2 a_3)$ с периодом, содержащим хотя бы две различные цифры?

4. Рассматривается множество M целых чисел $n \in [-50; 250]$, для которых выражение $A = n^3 - 2n^2 - 13n - 10$ делится на 13. Сколько целых чисел содержится в M ? Найти наибольшее и наименьшее из них?

5. AM и BN – биссектрисы треугольника ABC . На прямой MN расположена точка P , удаленная от прямых AB и BC на расстояния 4 и 2 соответственно. Найти расстояние от точки P до прямой AC .