Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом» 2021,математика,
11 класс.

Вариант № 1

1. Сколько раз за сутки секундная и минутная стрелки часов образуют с часовой стрелкой угол в 30^0? (сутки начинаются в полночь).

2. Решить неравенство: $\dfrac{\sin^2 x}{|\cos 2x|} \le 2|\sin x| - |\cos 2x|$.

3. Сколько существует пар натуральных чисел (a,b), у которых $НОК(a,b) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 = 17640$, а $НОД(a,b) = 12$? Среди всех таких пар указать ту, для которой $a+b$ принимает минимально возможное значение и найти это значение (пары (a,b) и (b,a) считать за одну).

4. На столе лежит колода игральных карт 36 листов. Два опытных игрока Кондрат и Игнат (каждый из них всегда делает правильный ход) начинают игру по следующим правилам. В начале игры каждый из игроков совершенно случайно называет одну из цифр от 1 до 3. Их сумма определяет (на всю игру) максимальное число карт, которые при очередном ходе игроки могут забрать со стола. Игрок не может при своем ходе не взять со стола карту. Выигрывает тот из игроков, кто сможет забрать последнюю карту в колоде. Начинает всегда Кондрат. Какая вероятность победы Игната?

5. При каких a уравнение $\arcsin(\cos x) = \cos\left(\arcsin(x-a)\right)$ имеет единственное решение?

6. На ребре AD основания куба $ABCDA'B'C'D'$ (AA', BB', CC', DD' параллельные боковые ребра) расположена точка M так, что $AM : AD = 1:3$. Через точку M и вершины A' и C' куба проведена плоскость P. Найти расстояние до плоскости P точки N, расположенной на ребре AB так, что $AN : AB = 1:2$, если длина ребра куба равна $2\sqrt{19}$.

Вариант № 2

1. Сколько раз за сутки секундная и часовая стрелки часов лежат на одной прямой, а минутная стрелка ей перпендикулярна? (сутки начинаются в полночь).

2. Решить неравенство: $\dfrac{\sin^2 2x}{|\cos 3x|} \le 2|\sin 2x| - |\cos 3x|$.

3. Сколько существует пар натуральных чисел (a,b), у которых $НОК(a,b) = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 = 1372140$, а $НОД(a,b) = 54$? Среди всех таких пар указать ту, для которой $a+b$ принимает минимально возможное значение и найти это значение (пары (a,b) и (b,a) считать за одну).

4. На столе лежит колода игральных карт 52 листа. Два опытных игрока Кондрат и Игнат (каждый из них всегда делает правильный ход) начинают игру по следующим правилам. В начале игры каждый совершенно случайно называет одну из цифр от 1 до 3. Их сумма определяет (на всю игру) максимальное число карт, которые при очередном ходе игрок может забрать со стола. Игрок не может при своем ходе не взять со стола карту. Выигрывает тот из игроков, кто сможет забрать последнюю карту в колоде. Начинает всегда Кондрат. Какая вероятность победы Игната?

5. При каких a уравнение $\arccos(\sin x) = \sin\left(\arccos(x-a)\right)$ имеет ровно два решения?

6. На ребре AD основания куба $ABCDA'B'C'D'$ (AA', BB', CC', DD' параллельные боковые ребра) расположена точка M так, что $AM : AD = 1:2$. Через точку M и вершины A' и C' куба проведена плоскость P . Найти расстояние до плоскости P точки N , расположенной на ребре AB так, что $AN : AB = 1:4$, если длина ребра куба равна 2 .

Вариант № 3

1. Сколько раз за сутки секундная, минутная и часовая стрелки часов лежат на одной прямой? (сутки начинаются и заканчиваются в полночь).

2. Решить неравенство: $\dfrac{\cos^2 3x}{|\sin x|} \le 2|\cos 3x| - |\sin x|$.

3. Сколько существует пар натуральных чисел (a,b), у которых $НОК(a,b) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 3603600$, а $НОД(a,b) = 30$? Среди всех таких пар указать ту, для которой $a+b$ принимает минимальное возможное значение и найти это значение (пары (a,b) и (b,a) считать за одну).

4. На столе лежит колода игральных карт 36 листов. Два опытных игрока Кондрат и Игнат (каждый из них всегда делает правильный ход) начинают игру по следующим правилам. В начале игры каждый совершенно случайно называет одну из цифр от 1 до 4. Их сумма определяет (на всю игру) максимальное число карт, которые при очередном ходе игрок может забрать со стола. Игрок не может при своем ходе не взять со стола карту. Выигрывает тот из игроков, кто сможет забрать последнюю карту в колоде. Начинает всегда Кондрат. Какая вероятность победы Игната?

5. При каких a уравнение $\arcsin(\sin x) = \sin\left(|\arcsin(x-a)|\right)$ не имеет решений?

6. На ребре AD основания куба $ABCDA'B'C'D'$ (AA', BB', CC', DD' параллельные боковые ребра) расположена точка M так, что $AM : AD = 3:4$. Через точку M и вершины A' и C' куба проведена плоскость P . Найти расстояние до плоскости P точки N , расположенной на ребре AB так, что $AN : AB = 1:3$, если длина ребра куба равна $3\sqrt{41}$.

Вариант № 4

1. Сколько раз за сутки секундная и минутная стрелки на часах перпендикулярны часовой стрелке? (сутки начинаются и заканчиваются в полночь).

2. Решить неравенство: $\dfrac{\cos^2 4x}{|\sin 3x|} \le 2|\cos 4x| - |\sin 3x|$.

3. Сколько существует пар натуральных чисел (a,b), у которых $НОК(a,b) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 13 = 10296$, а $НОД(a,b) = 66$? Среди всех таких пар указать ту, для которой $a+b$ принимает минимальное возможное значение и найти это значение (пары (a,b) и (b,a) считать за одну).

4. На столе лежит колода игральных карт 52 листа. Два опытных игрока Кондрат и Игнат (каждый из них всегда делает правильный ход) начинают игру по следующим правилам. В начале игры каждый совершенно случайно называет одну из цифр от 1 до 4. Их сумма определяет (на всю игру) максимальное число карт, которые при очередном ходе игрок может забрать со стола. Игрок не может при своем ходе не взять со стола карту. Выигрывает тот из игроков, кто сможет забрать последнюю карту в колоде. Начинает всегда Кондрат. Какая вероятность победы Игната?

5. При каких a уравнение $\arccos(\cos x) = 1 - \left|\cos\left(\arccos(x-a)\right)\right|$ имеет бесконечное число решений?

6. На ребре AD основания куба $ABCDA'B'C'D'$ (AA', BB', CC', DD' параллельные боковые ребра) расположена точка M так, что $AM : AD = 2:5$. Через точку M и вершины A' и C' куба проведена плоскость P. Найти расстояние до плоскости P точки N, расположенной на ребре AB так, что $AN : AB = 3:4$, если длина ребра куба равна $12\sqrt{6}$.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом» 2021,математика,
11 класс.

Вариант № 1

1. Петя написал в своей тетради многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и предложил Васе угадать его степень. Вася задал Пете два вопроса: «Чему равно значение многочлена при $x=-3$?» и «Чему равен остаток от деления многочлена на $(x-n)$, где n – его степень?». Получив ответы 1 и 6 соответственно, Вася уверенно назвал степень многочлена. Как он это сделал? Какова степень многочлена?

2. При каких целых n функция $f(x)=\sin nx\cdot\cos\frac{7x}{n^2}$ имеет период $T=9\pi$?

3. Представить число 2021 в виде суммы трех взаимно простых чисел.

4. На детском новогоднем празднике раздавали шоколадные и фруктовые конфеты. Дети подходили к деду Морозу, залезали рукой в его мешок и вынимали из него по две конфеты. Когда Петя подошел к мешку, он понял, что шоколадных конфет в мешке почти не осталось и вероятность получить две шоколадные конфеты в три раза меньше, чем шоколадную и фруктовую. Какое наименьшее число шоколадных конфет могло находиться в мешке деда Мороза в момент, когда Петя забирал свои конфеты, если после него еще не менее 10 детей получили свои конфеты до того, как мешок опустел?

5. При каких α система уравнений $\begin{cases}(x-4\cos\alpha)^2+(y-4\sin\alpha)^2=1\\(x-5\cos2\alpha)^2+(y-5\sin2\alpha)^2=9\end{cases}$ имеет единственное решение?

6. Длины всех ребер (боковых и основания) тетраэдра $ABCD$ равны 1. На ребре AB расположена точка M так, что $AM:AB=1:3$. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми CM и AD.

Вариант № 2

1. Петя написал в своей тетради многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и предложил Васе угадать его степень. Вася задал Пете два вопроса: «Чему равно значение многочлена при $x=-2$?» и «Чему равен остаток от деления многочлена на $(x-n)$, где n – его степень?». Получив ответы 2 и 9 соответственно, Вася уверенно назвал степень многочлена. Как он это сделал? Какова степень многочлена?

2. При каких целых n функция $f(x)=\cos nx\cdot\cos\frac{6x}{n^2}$ имеет период $T=12\pi$?

3. Представить число 2021 в виде суммы четырех взаимно простых чисел.

4. На детском новогоднем празднике раздавали шоколадные и фруктовые конфеты. Дети подходили к деду Морозу, залезали рукой в его мешок и вынимали из него по две конфеты. Когда Петя подошел к мешку, он понял, что шоколадных конфет в мешке почти не осталось и вероятность получить две шоколадные конфеты в пять раз меньше, чем шоколадную и фруктовую. Какое наименьшее число фруктовых конфет могло находиться в мешке деда Мороза в момент, когда Петя забирал свои конфеты, если после него еще не менее 20 детей получили свои конфеты до того, как мешок опустел?

5. При каких α система уравнений $\begin{cases}(x-5\cos\alpha)^2+(y-5\sin\alpha)^2=1\\(x-6\cos2\alpha)^2+(y-6\sin2\alpha)^2=16\end{cases}$ имеет ровно два решения?

6. Длины всех ребер (боковых и основания) тетраэдра $ABCD$ равны 1. На ребре AB расположена точка M так, что $AM : AB = 1:4$. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми CM и AD.

Вариант № 3

1. Петя написал в своей тетради многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и предложил Васе угадать его степень. Вася задал Пете два вопроса: «Чему равно значение многочлена при $x=-1$?» и «Чему равен остаток от деления многочлена на $(x-n)$, где n – его степень?». Получив ответы 3 и 10 соответственно, Вася уверенно назвал степень многочлена. Как он это сделал? Какова степень многочлена?

2. При каких целых n функция $f(x)=\cos nx \cdot \sin \frac{15x}{n^2}$ имеет период $T=5\pi$?

3. Представить число 2021 в виде суммы пяти взаимно простых чисел.

4. На детском новогоднем празднике раздавали шоколадные и фруктовые конфеты. Дети подходили к деду Морозу, залезали рукой в его мешок и вынимали из него по две конфеты. Когда Петя подошел к мешку, он понял, что шоколадных конфет в мешке почти не осталось и вероятность получить две шоколадные конфеты в семь раз меньше, чем шоколадную и фруктовую. Какое наименьшее число фруктовых конфет могло находиться в мешке деда Мороза в момент, когда Петя забирал свои конфеты, если после него еще не менее 30 детей получили свои конфеты до того, как мешок опустел?

5. При каких α система уравнений $\begin{cases} (x-6\cos\alpha)^2+(y-6\sin\alpha)^2=4 \\ (x-7\cos 2\alpha)^2+(y-7\sin 2\alpha)^2=16 \end{cases}$ не имеет решений?

6. Длины всех ребер (боковых и основания) тетраэдра $ABCD$ равны 1. На ребре AB расположена точка M так, что $AM : AB = 2:3$. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми CM и AD.

Вариант № 4

1. Петя написал в своей тетради многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и предложил Васе угадать его степень. Вася задал Пете два вопроса: «Чему равно значение многочлена при $x=-4$?» и «Чему равен остаток от деления многочлена на $(x-n)$, где n – его степень?». Получив ответы 4 и 17 соответственно, Вася уверенно назвал степень многочлена. Как он это сделал? Какова степень многочлена?

2. При каких целых n функция $f(x)=\sin nx \cdot \sin \frac{21x}{n^2}$ имеет период $T=7\pi$?

3. Представить число 2021 в виде суммы шести взаимно простых чисел.

4. На детском новогоднем празднике раздавали шоколадные и фруктовые конфеты. Дети подходили к деду Морозу, залезали рукой в его мешок и вынимали из него по две конфеты. Когда Петя подошел к мешку, он понял, что шоколадных конфет в мешке почти не осталось и вероятность получить две шоколадные конфеты в девять раз меньше, чем шоколадную и фруктовую. Какое наименьшее число шоколадных конфет могло находиться в мешке деда Мороза в момент, когда Петя забирал свои конфеты, если после него еще не менее 25 детей получили свои конфеты до того, как дед Мороз съел сам последнюю конфету?

5. При каких α система уравнений $\begin{cases} (x-7\cos\alpha)^2+(y-7\sin\alpha)^2=9 \\ (x-8\cos 2\alpha)^2+(y-8\sin 2\alpha)^2=25 \end{cases}$ имеет решения?

6. Длины всех ребер (боковых и основания) тетраэдра $ABCD$ равны 1. На ребре AB расположена точка M так, что $AM : AB = 1:2$. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми CM и AD.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом» 2021,математика,
11 класс.

Вариант № 1

1. Петя написал на бумаге некоторый многочлен с неотрицательными целыми коэффициентами и думал, что Вася, задав только два вопроса Пете по телефону, никогда не сможет определить все коэффициенты многочлена. На первый Васин вопрос: «Чему равно значение многочлена при x=3?» Петя ответил «49». На второй Васин вопрос: «Чему равно значение многочлена при x=49?» был получен ответ «122455». Вася, немного подумав, назвал Пете все коэффициенты многочлена, который он написал. Какой многочлен придумал Петя?

2. Решить уравнение $(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x})(\cos 2x+\sqrt{1+\cos^2 2x})=1$.

3. Найти наибольшее значение выражения $F=\dfrac{(5n-18)НОД(n+9,n+2)}{НОК(n+9,n+2)}$ на множестве натуральных чисел. При каком n оно достигается?

4. Петя совершенно случайно написал на бумаге два телефонных номера. Какова вероятность того, что суммы последних двух цифр этих номеров отличаются на 6 единиц?

5. Доказать, что уравнение $x^3-6x=a^3+\dfrac{8}{a^3}$ не может иметь трех действительных решений ни при каких a. При каких a уравнение имеет два различных решения? Найти эти решения.

6. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды наклонено к плоскости ее основания под углом 45^0. В пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании пирамиды, а другие четыре – на ее боковых гранях. Найти отношение объемов куба и пирамиды.

Вариант № 2

1. Петя написал на бумаге некоторый многочлен с неотрицательными целыми коэффициентами и думал, что Вася, задав только два вопроса Пете по телефону, никогда не сможет определить все коэффициенты многочлена. На первый Васин вопрос:«Чему равно значение многочлена при x=2?» Петя ответил «20». На второй Васин вопрос: «Чему равно значение многочлена при $x=20$?» был получен ответ «160004». Вася, немного подумав, назвал Пете все коэффициенты многочлена, который он написал. Какой многочлен придумал Петя?

2. Решить уравнение $\sin 3x+\sqrt{1+\sin^2 3x}=\sqrt{1+\cos^2 x}-\cos x$.

3. Найти наибольшее значение выражения $F=\dfrac{(7n-38)НОД(n+6,n+1)}{НОК(n+6,n+1)}$ на множестве натуральных чисел. При каком n оно достигается?

4. Петя совершенно случайно написал на бумаге два телефонных номера. Какова вероятность того, что суммы последних двух цифр этих номеров отличаются на 5 единиц?

5. Доказать, что уравнение $x^3+3x=a^3-\dfrac{1}{a^3}$ имеет только одно действительное решение при любых допустимых a. Найти это решение.

6. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды наклонено к плоскости ее основания под углом 60^0. В пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании пирамиды, а другие четыре – на ее боковых гранях. Найти отношение объемов куба и пирамиды.

Вариант № 3

1. Петя написал на бумаге некоторый многочлен с неотрицательными целыми коэффициентами и думал, что Вася, задав только два вопроса Пете по телефону, никогда не сможет определить все коэффициенты многочлена. На первый Васин вопрос: «Чему равно значение многочлена при x=4?» Петя ответил «78». На второй Васин вопрос: «Чему равно значение многочлена при $x = 78$?» был получен ответ «474714». Вася, немного подумав, назвал Пете все коэффициентымногочлена, который он написал. Какой многочлен придумал Петя?

2. Решить уравнение $(\cos 2x + \sqrt{1+\cos^2 2x})(\sin 3x + \sqrt{1+\sin^2 3x}) = 1$.

3. Найти наибольшее значение выражения $F = \dfrac{(9n-167)НОД(n+12, n+1)}{НОК(n+12, n+1)}$ на множестве натуральных чисел. При каком n оно достигается?

4. Петя совершенно случайно написал на бумаге два телефонных номера. Какова вероятность того, что суммы последних двух цифр этих номеров отличаются на 4 единицы?

5. Доказать, что уравнение $x^3 - 9x = a^3 + \dfrac{27}{a^3}$ не может иметь трех действительных решений ни при каких a. При каких a уравнение имеет единственное решение? Найти это решение.

6. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды наклонено к плоскости ее основания под углом 30^0. В пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании пирамиды, а другие четыре – на ее боковых гранях. Найти отношение объемов куба и пирамиды.

Вариант № 4

1. Петя написал на бумаге некоторый многочлен с неотрицательными целыми коэффициентами и думал, что Вася, задав только два вопроса Пете по телефону никогда не сможет определить всекоэффициенты многочлена. На первый Васин вопрос: «Чему равно значение многочлена при $x = 1$?» Петя ответил «4». На второй Васин вопрос: «Чему равно значение многочлена при $x = 4$?» был получен ответ «97». Вася, немного подумав, назвал Пете все коэффициенты многочлена, который он написал. Какой многочлен придумал Петя?

2. Решить уравнение $\sin 3x + \sqrt{1+\sin^2 3x} = \sqrt{1+\sin^2 2x} - \sin 2x$.

3. Найти наибольшее значение выражения $F = \dfrac{(11n-53)НОД(n+5, n+2)}{НОК(n+5, n+2)}$ на множестве натуральных чисел. При каком n оно достигается?

4. Петя совершенно случайно написал на бумаге два телефонных номера. Какова вероятность того, что суммы последних двух цифр этих номеров отличаются на 3 единицы?

5. Доказать, что уравнение $x^3 + 12x = a^3 - \dfrac{64}{a^3}$ имеет только одно действительное решение при любых допустимых a. Найти это решение.

6. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды наклонено к плоскости ее основания под углом 75^0. В пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании пирамиды, а другие четыре – на ее боковых гранях. Найти отношение объемов куба и пирамиды.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом» 2021,математика,
11 класс.

Вариант № 1

1. Скорость движения тела на прямой изменяется по закону $v(t) = A\left|\sin(\alpha t)\right|,\ t \ge 0$ с некоторыми константами $A > 0$ и $0 < \alpha < 0,2$. Известно, что за каждые 20 сек точка проходит путь 2м. Какой путь пройдет тело спустя 65 сек после начала движения?

2. Доказать, что число $x_1 = -\sin\dfrac{\pi}{18}$ является корнем кубического уравнения $8x^3 - 6x - 1 = 0$. Найти два других его корня.

3. При каких целых числах b и c выражение $\sqrt{4x^2 + bx + c}$ целое при любых целых x ?

4. В колоде 10 карт, на каждой из них нарисовано одно из чисел от 1 до 10. Случайно выбранную из колоды карту кладут на стол, показывают всем написанное на ней число и возвращают ее в колоду. После этого колода тщательно перемешивается и готова к продолжению игры. Петя выкладывал на стол карту три раза. Какова вероятность того, что сумма выпавших чисел оказалась равной 5?

5. Множество вертикальных и горизонтальных параллельных прямых разбивают плоскость на бесконечное число равных прямоугольников со сторонами 1 и $\sqrt{3}$. Пусть A – одна точек пересечения прямых. Рассмотрим множество всех равносторонних треугольников с вершиной в точке A и двумя другими вершинами, расположенными в точках пересечения прямых. Какое минимальное значение может принимать площадь таких треугольников? Сколько треугольников из этого множества имеет площадь $39\sqrt{3}$?

6. Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Длины сторон AB и AD равны. На стороне CD расположена точка Q так, что $DQ = 1$, а на стороне BC – точка P так, что $BP = 2$. При этом $\measuredangle DAB = 2\measuredangle QAP$. Найти длину отрезка PQ.

Вариант № 2

1. Скорость движения тела на прямой изменяется по закону $v(t) = A\left|\sin(\alpha t)\right|,\ t \ge 0$ с некоторыми константами $A > 0$ и $0 < \alpha < 0,15$. Известно, что за каждые 30 сек точка проходит путь 6м. Какой путь пройдет тело спустя 50 сек после начала движения?

2. Доказать, что число $x_1 = 2\cos\dfrac{\pi}{18}$ является корнем кубического уравнения $x^3 - 3x - \sqrt{3} = 0$.
Найти два других его корня.

3. При каких целых числах a и c выражение $\sqrt{ax^2 + 8x + c}$ целое при любых целых x ?

4. В колоде 12 карт, на каждой из них нарисовано одно из чисел от 1 до 12. Случайно выбранную из колоды карту кладут на стол, показывают всем написанное на ней число и возвращают ее в колоду. После этого колода тщательно перемешивается и готова к продолжению игры. Петя выкладывал на стол карту четыре раза. Какова вероятность того, что сумма выпавших чисел оказалась большей 6?

5. Множество вертикальных и горизонтальных параллельных прямых разбивают плоскость на бесконечное число равных прямоугольников со сторонами 2 и $3\sqrt{3}$. Пусть A – одна точек пересечения прямых. Рассмотрим множество всех равносторонних треугольников с вершиной в точке A и двумя другими вершинами, расположенными в точках пересечения прямых. Какое минимальное значение может принимать площадь таких треугольников? Сколько треугольников из этого множества имеет площадь $108\sqrt{3}$?

6. Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Длины сторон AB и AD равны. На стороне CD расположена точка Q так, что $DQ = 2$, а на стороне BC – точка P так, что $BP = 3$. При этом $\measuredangle DAB = 2\measuredangle QAP$. Найти длину отрезка PQ.

Вариант № 3

1. Скорость движения тела на прямой изменяется по закону $v(t) = A\left|\sin(\alpha t)\right|, t \geq 0$ с некоторыми константами $A > 0$ и $0 < \alpha < 0,3$. Известно, что за каждые 15 сек точка проходит путь 5м. Какой путь пройдет тело спустя 95 сек после начала движения?

2. Доказать, что число $x_1 = -tg\,\dfrac{2\pi}{9}$ является корнем кубического уравнения $x^3 - 3\sqrt{3}x^2 - 3x + \sqrt{3} = 0$. Найти два других его корня.

3. При каких целых числах a и b выражение $\sqrt{ax^2 + bx + 16}$ целое при любых целых x ?

4. В колоде 6 карт, на каждой из них нарисовано одно из чисел от 1 до 6. Случайно выбранную из колоды карту кладут на стол, показывают всем написанное на ней число и возвращают ее в колоду. После этого колода тщательно перемешивается и готова к продолжению игры. Петя выкладывал на стол карту два раза. Какова вероятность того, что сумма выпавших чисел оказалась равной 8?

5. Множество вертикальных и горизонтальных параллельных прямых разбивают плоскость на бесконечное число равных прямоугольников со сторонами 3 и $2\sqrt{3}$. Пусть A – одна точек пересечения прямых. Рассмотрим множество всех равносторонних треугольников с вершиной в точке A и двумя другими вершинами, расположенными в точках пересечения прямых. Какое минимальное значение может принимать площадь таких треугольников? Сколько треугольников из этого множества имеет площадь $48\sqrt{3}$?

6. Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Длины сторон AB и AD равны. На стороне CD расположена точка Q так, что $DQ = 3$, а на стороне BC – точка P так, что $BP = 4$. При этом $\measuredangle DAB = 2\measuredangle QAP$. Найти длину отрезка PQ.

Вариант № 4

1. Скорость движения тела на прямой изменяется по закону $v(t) = A\left|\sin(\alpha t)\right|, t \geq 0$ с некоторыми константами $A > 0$ и $0 < \alpha < 0,1$. Известно, что за каждые 40 сек точка проходит путь 4 м. Какой путь пройдет тело спустя 100 сек после начала движения?

2. Доказать, что число $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}tg\,\dfrac{5\pi}{18}$ является корнем кубического уравнения $9x^3 - 9x^2 - 9x + 1 = 0$. Найти два других его корня.

3. При каких целых числах b и c выражение $\sqrt{16x^2 + bx + c}$ целое при любых целых x ?

4. В колоде 9 карт, на каждой из них нарисовано одно из чисел от 1 до 9. Случайно выбранную из колоды карту кладут на стол, показывают всем написанное на ней число и возвращают ее в колоду. После этого колода тщательно перемешивается и готова к продолжению игры. Петя выкладывал на стол карту пять раз. Какова вероятность того, что сумма выпавших чисел оказалась меньшей 9?

5. Множество вертикальных и горизонтальных параллельных прямых разбивают плоскость на бесконечное число равных прямоугольников со сторонами 4 и $\sqrt{3}$. Пусть A – одна точек пересечения прямых. Рассмотрим множество всех равносторонних треугольников с вершиной в точке A и двумя другими вершинами, расположенными в точках пересечения прямых. Какое минимальное значение может принимать площадь таких треугольников? Сколько треугольников из этого множества имеет площадь $412\sqrt{3}$?

6. Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Длины сторон AB и AD равны. На стороне CD расположена точка Q так, что $DQ=1$, а на стороне BC – точка P так, что $BP=5$. При этом $\measuredangle DAB = 2\measuredangle QAP$. Найти длину отрезка PQ.