Заключительный тур олимпиады «Росатом»,
9 класс, Москва, март 2021

Вариант № 1

1. Команда из трех пиратов причалила к острову, чтобы разделить оставленный там клад золотых монет. Время было позднее, и они решили отложить дележ монет до утра. Первый пират проснулся ночью и решил забрать свою долю. Разделить монеты на три равные части ему не удалось, поэтому он забрал сначала одну монету, а потом треть от оставшихся и пошел спать. Не зная про это, второй пират проснулся ночью и проделал то же самое что и первый. Третий пират повторил то, что сделали первый и второй. Утром, не сказав друг другу ни слова, они разделили между собой поровну оставшиеся монеты. Сколько монет досталось каждому пирату, если первоначально клад содержал не менее 110 и не более 200 монет?

2. Сколько существует натуральных чисел k, для которых перевод обыкновенной дроби $\frac{2k+3}{2k}$ в десятичную приведет к конечной десятичной дроби с 100 знаками после запятой?

3. При каких натуральных n дробь $\frac{2}{n}$ может быть представлена периодической десятичной дробью вида $0{,}1(a_1a_2)$ с периодом, содержащим две различные цифры?

4. Рассматривается множество M целых чисел $n\in[-20;100]$, для которых выражение $A=n^3+n^2-14n-24$ делится на 7. Сколько целых чисел содержится в M? Найти наибольшее и наименьшее из них?

5. AM и BN – биссектрисы треугольника ABC. На прямой MN расположена точка P, удаленная от прямых AB и BC

на расстояния 4 и 1 соответственно. Найти расстояние от точки P до прямой AC .

Ответы и решения

1. Пусть m – число монет клада. Тогда к утру количество оставшихся монет N равно

$$N=\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}(m-1)-1\right)-1\right)=\frac{2^3}{3^3}(m-1)-\frac{2}{3}-\frac{2^2}{3^2},$$

$$N=\frac{2^3}{3^3}(m-1)-\frac{10}{9}=3n,$$

$$8(m-1)-30=81k, \text{тогда} \begin{cases} m-1=3t, \\ 8t-27k=10, \end{cases} \begin{cases} m=3t+1, \\ k=2s, \\ 4t-27s=5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} m=3t+1, \\ k=2s, \\ t=8+27u, \\ s=1+4u. \end{cases} \text{Откуда } m=3(8+27u)+1=81u+25.$$

С учетом ограничений

$$110\le 81u+25\le 200, \text{значит } u=2, m=187.$$

$$m_1=1+\frac{187-1}{3}=63, \qquad \widetilde{m}_1=63+18=81$$

$$-\text{деньги первого пирата;}$$

$$m_2=1+\frac{187-63-1}{3}=42, \qquad \widetilde{m}_2=42+18=60$$

$$-\text{деньги второго пирата;}$$

$$m_3=1+\frac{187-63-42-1}{3}=28, \qquad \widetilde{m}_3=28+18=46$$

$$-\text{деньги третьего пирата;}$$

$$m_0=\frac{187-63-42-28}{3}=18$$

$$-\text{деньги, которые получил каждый утром.}$$

Ответ: первый пират 81 монета, второй пират 60 монет, третий пират 46 монет.

2. Число k – натуральное число. Представим дробь $\frac{2k+3}{2k}$ в виде смешанного числа, десятичной дроби

$$\frac{2k+3}{2k} = 1 + \frac{3}{2k} = 1 + 0,00\underbrace{\ldots}_{m}0a_1a_2\underbrace{\ldots}_{n}a_n,$$

$$\text{таким образом } \frac{3\cdot 10^{n+m}}{2k} = a_1a_2\ldots a_n,$$

$m = 0,1,\ldots,\quad n = 1,2,\ldots,\quad n+m = 100,\ a_1 \neq 0.$

Если число знаков после запятой $n+m=s$, то число k должно быть делителем числа $3\cdot 2^{s-1}\cdot 5^s$, то есть $k = 3^p \cdot 2^q \cdot 5^r$, $p = 0,1,\quad q = 0,1,\ldots,(s-1),\quad r = 0,1,\ldots,s.$

Таких делителей всего $2s(s+1)$, подставляя $s=100$, получим 20200 искомых k.

Ответ: 20200.

3. Обозначим выражение: $A=\overline{a_1a_2}$ (допускается, что $a_1=0$)

Пусть искомое число a, $a = 0,1(a_1a_2)$ представлено в виде десятичной, а затем обыкновенной дроби

$$10a = 1 + 0,(a_1a_2) = 1 + \frac{A}{99} = \frac{20}{n}, n = \frac{1980}{99+A}.$$

Поскольку дробь $\frac{A}{99}$ – правильная, получим оценку

$$\frac{1980}{99+98} \leq n \leq \frac{1980}{99+1}, \text{откуда } 10 < n \leq 19.$$

На указанном промежутке допустимыми являются:

$$n = 11, 180 = 99 + A, \text{значит } a_1 = 8,\ a_2 = 1;$$

$$n = 12, 165 = 99 + A,\ \text{значит } a_1 = 6, a_2 = 6$$

$$-\text{по условию цифры различны}, \emptyset;$$

$$n = 15, 132 = 99 + A, \text{значит } a_1 = 3,\ a_2 = 3,\ \emptyset;$$

$$n = 18, 110 = 99 + A, \text{значит } a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ \emptyset.$$

Условию задачи удовлетворяет только $n=11$.

Ответ: $n=11$.

4. Среди делителей 24 находим целый корень многочлена A:

$$A(-2) = 0, \text{тогда } A = (n+2)(n^2 - n - 12).$$

Разложим многочлен на множители

$$A=(n+2)(n+3)(n-4).$$

Рассмотрим *случаи*, когда один из множителей кратен 7.

1. $n+2=7t, n=7t-2, -20\le 7t-2\le 100,$

тогда $t=-2;-1;\dots 14.$ Всего 17 целых чисел.

2. $n+3=7m, n=7m-3, -20\le 7m-3\le 100,$

$m=-2,-1,\dots,14.$ Всего 17 целых чисел.

3. $n-4=7k, n=7k+4, -20\le 7k+4\le 100,$

$k=-3;-2;\dots 13.$ Всего 17 целых чисел.

Множество целых чисел n, удовлетворяющих *случаю* 1, не удовлетворяют условиям *случаев* 2 и 3.

Заметим, что *случаи* 2 и 3 выделяют одно и то же множество целых чисел: $7m-3=7k+4, m=k+1.$

Таким образом, множество M содержит 34 различных числа. В первой серии наибольшее 96, наименьшее -16. Во второй серии наибольшее число 95, наименьшее -17.

Поэтому $n_{\min}=-17,\ n_{\max}=96$

Ответ: 1)34 числа; 2) $n_{\min}=-17,\ n_{\max}=96$.

5. Рассмотрим треугольник ABC и проведём биссектрисы соответствующих углов. Пусть заданные расстояния по условию задачи $\rho(AB,P)=a=4,\ \rho(CB,P)=b=1.$ Возможны два случая расположения точки P.

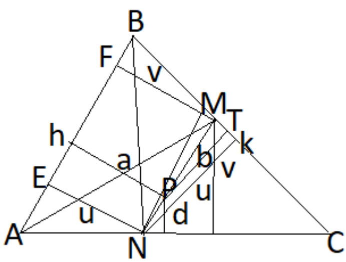

Рис.1

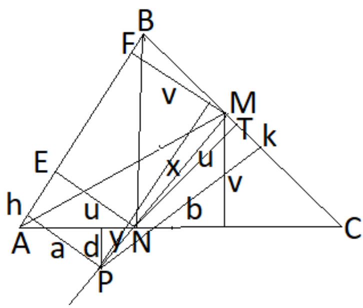

Рис. 2

Случай 1. Точка P делит отрезок MN внутренним образом, $PN:PM=\lambda$ (Рис. 1).

Введём следующие обозначения: длина NP равна y, длина отрезка PM равна x, пусть u,v – расстояния точек N и M до прямой AB, d – расстояние точки P до прямой AC. Из свойств биссектрис и подобия треугольников, если

$$\frac{y}{x}=\lambda,\ \begin{cases}\dfrac{a-u}{v-u}=\dfrac{y}{x+y}=\dfrac{\lambda x}{(1+\lambda)x}=\dfrac{\lambda}{1+\lambda},\\ \dfrac{b}{u}=\dfrac{x}{x+y}=\dfrac{1}{1+\lambda},\end{cases}$$

$$\text{тогда}\begin{cases}u=b(1+\lambda),\\ v=\dfrac{1+\lambda}{\lambda}(a-b),\end{cases}$$

$$\text{откуда }\frac{d}{v}=\frac{y}{x+y}=\frac{\lambda}{1+\lambda},d=\frac{\lambda\cdot v}{1+\lambda}=a-b=4-1=3.$$

Случай 2. Точка P делит отрезок MN внешним образом $PN:PM=\lambda$ (Рис. 2).

Введём следующие обозначения: пусть $PN=x, NM=y$, тогда

$$\frac{y}{x}=\frac{\lambda}{1-\lambda},\begin{cases}\dfrac{u-a}{v-a}=\dfrac{y}{x+y}=\lambda,\\ \dfrac{u}{b}=\dfrac{x}{x+y}=1-\lambda,\end{cases}$$

$$\text{значит}\begin{cases}u=(1-\lambda)b,\\ v=\dfrac{1-\lambda}{\lambda}(b-a),\end{cases}$$

$$\frac{d}{v}=\frac{y}{x}=\frac{\lambda}{1-\lambda},d=\frac{\lambda v}{1-\lambda}=b-a=4-1=3.$$

Ответ: $d=a-b=3$.

Вариант № 2

1. Команда из четырех пиратов причалила к острову, чтобы разделить оставленный там клад золотых монет. Время было позднее, и они решили отложить дележ монет до утра. Первый пират проснулся ночью и решил забрать свою долю. Разделить монеты на четыре равные части ему не удалось, поэтому он забрал сначала одну монету, а потом четверть от оставшихся и пошел спать. Не зная про это, второй пират проснулся ночью и проделал то же самое что и первый. Третий и четвертый пираты повторили то, что сделали первый и второй. Утром, не сказав друг другу ни слова, они разделили между собой поровну оставшиеся монеты. Сколько монет досталось каждому пирату, если первоначально клад содержал не более 1000 монет?

Ответ: первому пирату 252 монеты, второму пирату 204 монеты, третьему пирату 168 монет, четвертому – 141 монета.

2. Сколько существует натуральных чисел k, для которых перевод обыкновенной дроби $\dfrac{10k+2}{5k}$ в десятичную приведет к конечной десятичной дроби с 50 знаками после запятой?

Ответ: 2600.

3. При каких натуральных n дробь $\dfrac{3}{n}$ может быть представлена периодической десятичной дробью вида $0{,}1(a_1a_2)$ с периодом, содержащим две различные цифры?

Ответ: $n = 22; a_1 = 3,\ a_2 = 6$.

4. Рассматривается множество M целых чисел $n \in [-100; 500]$, для которых выражение $A = n^3 + 2n^2 - 5n - 6$ делится на 11. Сколько целых чисел содержится в M? Найти наибольшее и наименьшее из них?

Ответ: 1) 164 числа; 2) $n_{\min} = -100,\ n_{\max} = 497$.

5. AM и BN – биссектрисы треугольника ABC. На прямой MN расположена точка P, удаленная от прямых AB и BC на расстояния 3 и 2 соответственно. Найти расстояние от точки P до прямой AC.

Ответ: $d = a - b = 1$.

Вариант № 3

1. Команда из трех пиратов причалила к острову, чтобы разделить оставленный там клад золотых монет. Время было позднее, и они решили отложить дележ монет до утра. Первый пират проснулся ночью и решил забрать свою долю. Разделить монеты на три равные части ему не удалось, поэтому он забрал сначала две монеты, а потом треть от оставшихся и пошел спать. Не зная про это, второй пират проснулся ночью и проделал то же самое что и первый. Третий пират повторил то, что сделали первый и второй. Утром, не сказав друг другу ни слова, они разделили между собой поровну оставшиеся монеты. Сколько монет досталось каждому пирату, если первоначально клад содержал не менее 220 и не более 300 монет?

Ответ: первому пирату 127 монет, второму пирату 94 монеты, третьему пирату 72 монеты.

2. Сколько существует натуральных чисел k, для которых перевод обыкновенной дроби $\frac{15k+4}{5k}$ в десятичную приведет к конечной десятичной дроби с 22 знаками после запятой?

Ответ: 550.

3. При каких натуральных n дробь $\frac{4}{n}$ может быть представлена периодической десятичной дробью вида $0,1(a_1a_2a_3)$ с периодом, содержащим хотя бы две различные цифры?

Ответ: $n = 27; a_1 = 4,\ a_2 = 8, a_3 = 1;$

$n = 37;\ a_1 = 0,\ a_2 = 8,\ a_3 = 2.$

4. Рассматривается множество M целых чисел $n \in [-30;100]$, для которых выражение $A = n^3 + 4n^2 + n - 6$ делится на 5. Сколько целых чисел содержится в M? Найти наибольшее и наименьшее из них?

Ответ: 1) 78 чисел; 2) $n_{\min} = -29$, $n_{\max} = 98$.

5. AM и BN – биссектрисы треугольника ABC. На прямой MN расположена точка P, удаленная от прямых AB и BC на расстояния 5 и 1 соответственно. Найти расстояние от точки P до прямой AC.

Ответ: $d = a - b = 4$.

Вариант № 4

1. Команда из четырех пиратов причалила к острову, чтобы разделить оставленный там клад золотых монет. Время было позднее, и они решили отложить дележ монет до утра. Первый пират проснулся ночью и решил забрать свою долю. Разделить монеты на четыре равные части ему не удалось, поэтому он забрал сначала две монеты, а потом четверть от оставшихся и пошел спать. Не зная про это, второй пират проснулся ночью и проделал то же самое что и первый. Третий и четвертый пираты повторили то, что сделали первый и второй. Утром, не сказав друг другу ни слова, они разделили между собой поровну оставшиеся монеты. Сколько монет досталось каждому пирату, если первоначально клад содержал не менее 3000 и не более 4000 монет?

Ответ: первому пирату 1178 монет, второму пирату 954 монеты, третьему пирату 786 монет, четвертому – 660 монет.

2. Сколько существует натуральных чисел k, для которых перевод обыкновенной дроби $\dfrac{8k+5}{2k}$ в десятичную приведет к конечной десятичной дроби с 48 знаками после запятой?

Ответ: 2400.

3. При каких натуральных n дробь $\frac{5}{n}$ может быть представлена периодической десятичной дробью вида $0,1(a_1a_2a_3)$ с периодом, содержащим хотя бы две различные цифры?

Ответ: $n = 27; a_1 = 8, a_2 = 5, a_3 = 1;$

$n = 37; a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 1.$

4. Рассматривается множество M целых чисел $n \in [-50; 250]$, для которых выражение $A = n^3 - 2n^2 - 13n - 10$ делится на 13. Сколько целых чисел содержится в M ? Найти наибольшее и наименьшее из них?

Ответ: 1) 69 чисел; 2) $n_{\min} = -47$, $n_{\max} = 246$.

5. AM и BN – биссектрисы треугольника ABC . На прямой MN расположена точка P , удаленная от прямых AB и BC на расстояния 4 и 2 соответственно. Найти расстояние от точки P до прямой AC .

Ответ: $d = a - b = 2$.