

Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», весна 2021, математика, 8 класс

Вариант № 1

1. Петя добирается от дома до школы на автобусе. На полпути от дома до школы автобус пересекает железнодорожные пути. В понедельник автобус простоял на переезде 5 минут и, сохраняя прежнюю скорость, доехал до школы. Во вторник автобус двигался до переезда с той же скоростью, но простояв на переезде на 10 мин дольше, чем в понедельник, вынужден был увеличить скорость вдвое, чтобы общее время поездки осталось неизменным. Сколько времени заняла поездка от дома до школы в среду, когда переезд оказался свободным?

2. На какое натуральное число можно сократить числитель и знаменатель обыкновенной дроби вида $\frac{3n+2}{5n-7}$? При каких целых n это может произойти?

3. Половина мальчиков класса сидит за партой с девочкой, и только треть девочек не хотят сидеть за партой вместе с мальчиком. Мальчики, сидящие с девочками, списывают у них контрольные работы, остальные мальчики – вынуждены работать самостоятельно. Девочки никогда не списывают друг у друга, но пятая часть девочек списывают контрольные у мальчиков, не сидящих с ними за партой. Сколько девочек пишет контрольную самостоятельно, если в классе не более 40 учащихся?

4. Для каких простых чисел p и q квадратное уравнение $x^2 + px + 3q = 0$ имеет целые корни?

5. На основании AC равнобедренного треугольника ABC построена как на диаметре окружность, пересекающая сторону BC в точке N так, что $BN : NC = 3 : 1$. Найти отношение длин сторон треугольника AC и BC .

Ответы и решения

1. Пусть s – расстояние от дома до школы (в км), v – скорость автобуса (в км/ч).

Тогда, по условию, время в пути в понедельник (в часах):

$$T_1 = \frac{s}{2v} + \frac{1}{12} + \frac{s}{2v} = \frac{s}{v} + \frac{1}{12},$$

а время в пути во вторник (в часах):

$$T_2 = \frac{s}{2v} + \frac{1}{4} + \frac{s}{4v} = \frac{3s}{4v} + \frac{1}{4}.$$

Поскольку $T_1 = T_2 \Rightarrow \frac{s}{v} + \frac{1}{12} = \frac{3s}{4v} + \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{s}{v} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{s}{v} = \frac{2}{3}$.

Но если переезд свободен, то поездка занимает как раз $\frac{s}{v} = \frac{2}{3}$ часа, то есть 40 минут.

Ответ: 40 минут.

2. Найдем наибольший общий делитель (НОД) числителя и знаменателя. По свойству НОД:

$$\begin{aligned} \text{НОД}(5n - 7, 3n + 2) &= \text{НОД}(5n - 7 - (3n + 2), 3n + 2) = \\ &= \text{НОД}(2n - 9, 3n + 2) = \text{НОД}(2n - 9, n + 11) = \\ &= \text{НОД}(n - 20, n + 11) = \text{НОД}(31, n + 11). \end{aligned}$$

Поскольку 31 – простое число, получаем, что $\text{НОД}(31, n + 11) = 1$ или $\text{НОД}(31, n + 11) = 31$. Первый случай не подходит, так как не приводит к сокращению дроби. Второй случай реализуется, только если $n + 11$ делится на 31, то есть, для $n = 31k - 11$, $k \in \mathbb{Z}$. При

этом дробь сокращается только на 31. Иных общих делителей у числителя и знаменателя быть не может, так как 31 – простое число.

Ответ: можно сократить на 31 при $n = 31k - 11$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Пусть m – количество мальчиков, d – число девочек в классе. Треть девочек не сидит с мальчиками. Значит, половина мальчиков сидят с остальными девочками, так что

$$\frac{m}{2} = \frac{2d}{3} \Rightarrow 3m = 4d \Rightarrow \begin{cases} m:4 \\ d:3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 4k \\ d = 3k, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Число списывающих девочек

$$n = \frac{3k}{5} \Rightarrow k:5 \Rightarrow k = 5p \Rightarrow \begin{cases} m = 20p, \\ d = 15p, p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

При этом количество списывающих девочек не должно превышать числа самостоятельных мальчиков. А количество списывающих мальчиков не должно превышать числа самостоятельных девочек. Всего в классе $d + m = 35p$ учащихся. С учетом условия задачи, $35p \leq 40 \Rightarrow p = 1$. Тогда число девочек в классе $d = 15$. Количество мальчиков $m = 20$. Из них 10 человек сидят с девочками и списывают, 10 работают самостоятельно. Списывающих девочек $n = 15 : 5 = 3 \leq 10$. Самостоятельно работают $15 - 3 = 12$ девочек, 10 из которых сидят с мальчиками. Все условия задачи выполнены.

Ответ: 12 девочек.

4. Пусть x_1, x_2 – целые решения уравнения $x^2 + px + 3q = 0$ с простыми p и q . Тогда, по теореме Виета,

$$x_1 + x_2 = -p < 0, \quad x_1 \cdot x_2 = 3q > 0.$$

Отсюда получаем, что оба корня должны быть отрицательные. Далее, поскольку корни целые, а числа $q, 3$ – простые, то возможны только два варианта:

$$x_1 = -1, x_2 = -3q \quad \text{или} \quad x_1 = -3, x_2 = -q.$$

Рассмотрим первый случай. Если $x_1 = -1, x_2 = -3q$, то $1 + 3q = p$. Таким образом, p и q имеют разную четность. Единственное

простое четное число – это 2. Если $p = 2$, то уравнение $1 + 3q = 2$ не имеет решения в простых числах, значит этот случай невозможен. Если же p – нечетно, то q – четно. Единственный возможный вариант $q = 2$. При этом $p = 1 + 2 \cdot 3 = 7$ – простое число. Получили решение $p = 7, q = 2$. При этом $x_1 = -1, x_2 = -6$.

Рассмотрим второй случай. Если $x_1 = -3, x_2 = -q$, то $3 + q = p$. Снова p и q имеют разную четность. Если $p = 2$, то уравнение $3 + q = 2$ не имеет решения в простых числах, значит этот случай невозможен. Если же p – нечетно, то q – четно. При $q = 2$ $p = 3 + 2 = 5$ – простое число. Получили еще одно решение $p = 5, q = 2$. При этом $x_1 = -3, x_2 = -2$.

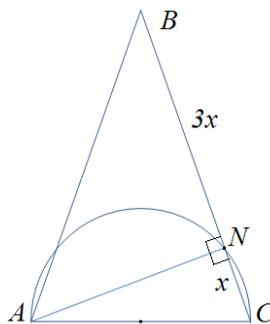
Мы рассмотрели все возможные случаи. Иных решений нет.

Ответ: имеется две пары решений: $p = 5, q = 2$; $p = 7, q = 2$.

5. Пусть $NC = x$, тогда $BN = 3x$. Треугольник ABC – равнобедренный, поэтому $AB = BC = 4x$. Угол ANC – прямой, так как опирается на диаметр. Тогда угол ANB – тоже прямой, так как ANC и ANB – смежные.

В прямоугольном треугольнике ANB , по теореме Пифагора:

$$AN^2 = AB^2 - BN^2 = 16x^2 - 9x^2 = 7x^2.$$



В прямоугольном треугольнике ANC , по теореме Пифагора:

$$AC = \sqrt{AN^2 + NC^2} = \sqrt{7x^2 + x^2} = 2\sqrt{2}x.$$

Тогда $\frac{AC}{BC} = \frac{2\sqrt{2}x}{4x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $\frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Вариант № 2

1. Петя добирается от дома до школы на автобусе. Проехав треть пути от дома до школы автобус пересекает железнодорожные пути. В понедельник автобус простоял на переезде 4 минуты и, сохранив прежнюю скорость, доехал до школы. Во вторник автобус двигался до переезда с той же скоростью, но простояв на переезде на 6 мин дольше, чем в понедельник, вынужден был увеличить скорость вдвое, чтобы общее время поездки осталось неизменным. Сколько времени заняла поездка от дома до школы в среду, когда переезд оказался свободным?

Ответ: 18 минут.

2. На какое натуральное число можно сократить числитель и знаменатель обыкновенной дроби вида $\frac{5n+3}{7n+8}$? При каких целых n это может произойти?

Ответ: можно сократить на 19 при $n = 19k + 7$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Треть мальчиков класса сидят за партой с девочкой, и только четверть девочек не хотят сидеть за партой вместе с мальчиком. Мальчики, сидящие с девочками, списывают у них контрольные работы, остальные мальчики – вынуждены работать самостоятельно. Девочки никогда не списывают друг у друга, но треть девочек списывают контрольные у мальчиков, не сидящих с ними за партой. Сколько мальчиков пишет контрольную самостоятельно, если в классе не более 40 учащихся?

Ответ: 18 мальчиков.

4. Для каких простых чисел p и q квадратное уравнение $x^2 + 3px + 5q = 0$ имеет целые корни?

Ответ: задача не имеет простых решений.

5. На основании AC равнобедренного треугольника ABC построена как на диаметре окружность, пересекающая сторону BC в

точке N так, что $BN : NC = 3 : 2$. Найти отношение длин отрезков AN и AC .

Ответ: $\frac{AN}{AC} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Вариант № 3

1. Петя добирается от дома до школы на автобусе. Проехав четверть пути от дома до школы автобус пересекает железнодорожные пути. В понедельник автобус простоял на переезде 6 минут и, сохранив прежнюю скорость, доехал до школы. Во вторник автобус двигался до переезда с той же скоростью, но простояв на переезде на 9 мин дольше, чем в понедельник, вынужден был увеличить скорость вдвое, чтобы общее время поездки осталось неизменным. Сколько времени заняла поездка от дома до школы в среду, когда переезд оказался свободным?

Ответ: 24 минуты.

2. На какое натуральное число можно сократить числитель и знаменатель обыкновенной дроби вида $\frac{4n+3}{5n+2}$? При каких целых n это может произойти?

Ответ: можно сократить на 7 при $n = 7k + 1, k \in \mathbb{Z}$.

3. Три четверти мальчиков класса сидят за партой с девочкой, и только каждая третья девочка не хочет сидеть за партой вместе с мальчиком. Мальчики, сидящие с девочками, списывают у них контрольные работы, остальные мальчики – вынуждены работать самостоятельно. Девочки никогда не списывают друг у друга, но половина девочек, не сидящих с мальчиками, списывают контрольные у мальчиков, не сидящих с девочками за партой. Сколько девочек пишет контрольную самостоятельно, если в классе не более 40 учащихся?

Ответ: 15 девочек.

4. Для каких простых чисел p и q квадратное уравнение $x^2 + 5px + 7q = 0$ имеет целые корни?

Ответ: имеется две пары решений: $p = 3, q = 2$; $p = 2, q = 3$.

5. На основании AC равнобедренного треугольника ABC построена как на диаметре окружность, пересекающая сторону BC в точке N так, что $BN : NC = 7 : 2$. Найти отношение длин отрезков AN и BC .

Ответ: $\frac{AN}{BC} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$.

Вариант № 4

1. Петя добирается от дома до школы на автобусе. Проехав три четверти пути от дома до школы автобус пересекает железнодорожные пути. В понедельник автобус простоял на переезде 8 минут и, сохранив прежнюю скорость, доехал до школы. Во вторник автобус двигался до переезда с той же скоростью, но простояв на переезде на 4 мин дольше, чем в понедельник, вынужден был увеличить скорость вдвое, чтобы общее время поездки осталось неизменным. Сколько времени заняла поездка от дома до школы в среду, когда переезд оказался свободным?

Ответ: 32 минуты.

2. На какое натуральное число можно сократить числитель и знаменатель обыкновенной дроби вида $\frac{3n+2}{8n+1}$? При каких целых n это может произойти?

Ответ: можно сократить на 13 при $n = 13k - 5, k \in \mathbb{Z}$.

3. Три четверти мальчиков класса сидят за партой с девочкой, и только треть девочек не хотят сидеть за партой вместе с мальчиком. Мальчики, сидящие с девочками, списывают у них контрольные работы, остальные мальчики – вынуждены работать самостоятельно. Девочки никогда не списывают друг у друга, но половина

девочек списывают контрольные у мальчиков, не сидящих с ними за партой. Сколько мальчиков пишет контрольную самостоятельно, если в классе не более 40 учащихся?

Ответ: 4 мальчика.

4. Для каких простых чисел p и q квадратное уравнение $x^2 + 7px + 3q = 0$ имеет целые корни?

Ответ: $p = 2, q = 11$.

5. На основании AC равнобедренного треугольника ABC построена как на диаметре окружность, пересекающая сторону BC в точке N так, что $BN : NC = 5 : 2$. Найти отношение длин медиан NO и BO треугольников ANC и ABC .

Ответ: $\frac{NO}{BO} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.