Заключительный тур олимпиады «Росатом», 7 класс, март 2021

Вариант № 1

1. Петя совершил прогулку по маршруту: от дома по горизонтальной тропинке до подъема на гору, подъем на вершину горы и спуск с нее по тому же склону, возвращение по тропинке домой. Путь от дома до подъёма на гору не менее, чем в два раза превышает путь по склону горы. По горизонтальной тропе Петя шел со скоростью 4 км/час, на подъеме – 2км/час, на спуске – 6км/час. Какой наименьший при этих условиях путь мог пройти Петя, если спустя 5 часов он вернулся домой?

2. Решить уравнение $1+1:(1+1:(1+1:(1+1:(2x-3))))=x$.

3. Про два двузначных, целых, положительных числа a и b известно, что 1) одно из них в три раза больше другого; 2) в их десятичной записи одна одинаковая цифра; 3) сумма цифр одного числа на 3 больше суммы цифр другого. Найти эти числа.

4. Обозначим через $s(a)$ сумму цифр в десятичной записи натурального числа a. Найти все такие числа a, для которых $a^2+s(a)=1533$.

5. Точка P расположена на стороне AB квадрата $ABCD$ так, что $AP:PB=1:3$. Точка Q лежит на стороне BC квадрата и делит ее в отношении $BQ:QC=3:2$. Прямые DP и AQ пересекаются в точке E. Найти отношение длин $PE:ED$.

Ответы и решения

1. Введём следующие обозначения: s_1 – длина (км) горизонтальной тропинки, s_2 – длина склона.

Тогда время в пути:

$$\frac{2s_1}{4}+\frac{s_2}{2}+\frac{s_2}{6}=5,\qquad \frac{s_1}{2}+\frac{2s_2}{3}=5,$$

значит $\begin{cases} s_1 = 2(5-2t) > 0, \\ s_2 = 3t > 0, \end{cases}$ получаем $t \in \left(0; \frac{5}{2}\right)$.
Заметим, что $s_1 \geq 2s_2$, то есть $2(5-2t) \geq 6t$, $t \in (0; 1]$.
Найдём наименьший при этих условиях путь, который мог пройти Петя: $s_1 + s_2 = 2(5-2t) + 3t = 10 - t$, $t \in \left(0;1\right]$.

Выражение принимает минимальное значение при $t = 1$, откуда $\min\ (s_1 + s_2)_{\mathrm{t=1}} = 9$. Тогда общий путь составил 18 км.

Ответ: 18 км.

2. Преобразуем уравнение, записав в виде дроби правую часть

$$(1 + 1: (1 + 1: (1 + 1: (2x - 3))) = \frac{1}{x-1},$$

$$1: (1 + 1: (1 + 1: (2x - 3)) = \frac{2-x}{x-1},$$

$$(1 + 1: (1 + 1: (2x - 3)) = \frac{x-1}{2-x},$$

$$1: (1 + 1: (2x - 3) = \frac{2x-3}{2-x},$$

$$(1 + 1: (2x - 3) = \frac{2-x}{2x-3},$$

$$1: (2x - 3) = \frac{5-3x}{2x-3},$$

$$2x - 3 = \frac{2x-3}{5-3x}.$$

Учитывая ограничение, $x \neq \frac{3}{2}, 5 - 3x = 1, x = \frac{4}{3}$.

Ответ: $x = \dfrac{4}{3}$.

3. Пусть $a > b$, обозначим x, y, z – цифры. Рассмотрим несколько случаев для десятичной записи искомых чисел.
Случай 1. Пусть $a = x \cdot 10 + y$, $b = y \cdot 10 + z$.
а) Запишем условия задачи для данных обозначений

$$\begin{cases} 10x + y = 3(10y + z), \\ x + y = y + z + 3, \end{cases} \begin{cases} 10x - 29y = 3z, \\ z = x - 3, \end{cases} 7x - 29y = -9, \begin{cases} x = 7, \\ y = 2, \\ z = 4. \end{cases}$$

Значит, $a = 72, b = 24$.

b) $\begin{cases} 10x+y=3(10y+z), \\ x+y=y+z-3, \end{cases}$ $\begin{cases} 10x-29y=3z, \\ z=x+3, \end{cases}$

$7x-29y=9$, нет цифр, удовлетворяющих условию задачи.

Случай 2. Пусть $a=x\cdot 10+y, b=z\cdot 10+x$.

$\begin{cases} 10x+y=3(10z+x), \\ x+y=x+z\pm 3, \end{cases}$ $\begin{cases} 7x+y=30z, \\ z=y\pm 3, \end{cases}$ $7x-29y=\pm 90, \emptyset$.

Случай 3. Пусть $a=x\cdot 10+y,\ b=x\cdot 10+z$, нет цифр, удовлетворяющих условию задачи.

Случай 4. Пусть $a=x\cdot 10+y,\ b=z\cdot 10+y$.

$\begin{cases} 10x+y=3(10z+y), \\ x+y=z+y\pm 3, \end{cases}$ $\begin{cases} 10x-2y=30z, \\ z=x\pm 3, \end{cases}$ $10x+y=\pm 45$,

$\begin{cases} x=4, \\ y=5, \\ z=1. \end{cases}$

Значит, $a=45$, $b=15$.

Ответ: $a=72, b=24$; $a=45, b=15$. .

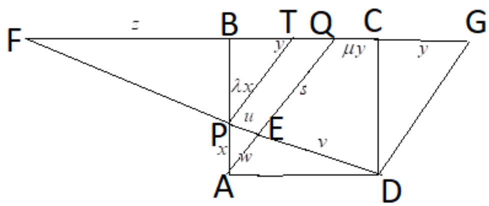
4. Искомые $a\le\sqrt{1533}, a\le 39$. Для таких чисел a сумма их цифр $s(a)\le 12$, поэтому

$a^2=1533-s(a)\ge 1533-12=1521, a\ge\sqrt{1521}=39$.

Сравнивая два неравенства, приходим к выводу $a=39$. Проверкой убеждаемся, что $a=39$ является решением уравнения.

Ответ: $a=39$.

5. Сделаем чертёж и проведём дополнительные построения.



Продолжим прямую PD до пересечения с прямой BC в точке F;

Построим прямые DG и PT параллельные AQ;

Введём следующие обозначения: $AP=x,\ PB=\lambda x,\ BQ=y,$

$$QC=\mu y,\ PE=u,\ ED=v.$$

Из подобия треугольников:

$\frac{z}{(1+\mu)y} = \lambda, z = \lambda(1+\mu)y.$
$\frac{BT}{\lambda x} = \frac{y}{(1+\mu)y}, BT = \frac{\lambda x}{1+\mu} = \frac{\lambda y}{1+\lambda}, TQ = y - \frac{\lambda y}{1+\lambda} = \frac{y}{1+\lambda}.$

$$QG = AD = (1+\mu)y.$$

По теореме Фалеса:

$$\frac{PE}{ED} = \frac{u}{v} = \frac{TQ}{QG} = \frac{y}{(1+\lambda)(1+\mu)y} = \frac{1}{(1+\lambda)(1+\mu)} = 3{:}20.$$

Ответ: $PE{:}ED = 3{:}20.$

Вариант № 2

1. Петя совершил прогулку по маршруту: от дома по горизонтальной тропинке до подъема на гору, подъем на вершину горы и спуск с нее по тому же склону, возвращение по тропинке домой. Путь от дома до подъёма на гору не менее, чем в три раза превышает путь по склону горы. По горизонтальной тропе Петя шел со скоростью 4 км/час, на подъеме – 1км/час, на спуске – 6км/час. Какой наименьший при этих условиях путь мог пройти Петя, если спустя 8 часов он вернулся домой?

Ответ: 24 км.

2. Решить уравнение $2+2:(1+2:(1+2:(1+2:(3x-8)))) = x.$

Ответ: $x = \frac{14}{5}$.

3. Про два двузначных, целых, положительных числа a и b известно, что 1) одно из них в два раза больше другого; 2) в их десятичной записи одна одинаковая цифра; 3) сумма цифр одного числа в два раза больше суммы цифр другого. Найти эти числа.

Ответ: $a_1 = 42, b_1 = 21; a_2 = 84, b_2 = 42; a_3 = 20, b_3 = 10;$
$a_4 = 40, b_4 = 20; a_5 = 60,\ b_5 = 30; a_6 = 80,\ b_6 = 40;$
$a_7 = 48,\ b_7 = 24;\ a_8 = 24,\ b_8 = 12.$

4. Обозначим через $s(a)$ сумму цифр в десятичной записи натурального числа a. Найти все числа a, для которых $a^2+s(a)=2414$.

Ответ: $a=49$.

5. Точка P расположена на стороне AB квадрата $ABCD$ так, что $AP:PB=2:3$. Точка Q лежит на стороне BC квадрата и делит ее в отношении $BQ:QC=3$. Прямые DP и AQ пересекаются в точке E. Найти отношение длин $AE:EQ$.

Ответ: $AE:EQ=4:9$.

Вариант № 3

1. Петя совершил прогулку по маршруту: от дома по горизонтальной тропинке до подъема на гору, подъем на вершину горы и спуск с нее по тому же склону, возвращение по тропинке домой. Путь от дома до подъёма на гору не менее, чем в четыре раза превышает путь по склону горы. По горизонтальной тропе Петя шел со скоростью 4 км/час, на подъеме – 1км/час, на спуске – 5км/час. Какой наименьший при этих условиях путь мог пройти Петя, если спустя 16 часов он вернулся домой?

Ответ: 50 км.

2. Решить уравнение $3+3:(1+3:(1+3:(1+3:(4x-15))))=x$.

Ответ: $x=\dfrac{30}{7}$.

3. Про два двузначных, целых, положительных числа a и b известно, что 1) одно из них больше другого на 14; 2) в их десятичной записи одна одинаковая цифра; 3) сумма цифр одного числа в два раза больше суммы цифр другого. Найти эти числа.

Ответ: $a_1=37,\ b_1=23;\ a_2=31,\ b_2=17$.

4. Обозначим через $s(a)$ сумму цифр в десятичной записи натурального числа a. Найти все такие числа a, для которых $a^2+s(a)=3495$.

Ответ: $a=59$.

5. Точка P расположена на стороне AB квадрата $ABCD$ так, что $AP:PB=1:2$. Точка Q лежит на стороне BC квадрата и делит ее в отношении $BQ:QC=2$. Прямые DP и AQ пересекаются в точке E. Найти отношение длин $PE:ED$.

Ответ: $PE:ED = 2:9$.

Вариант № 4

1. Петя совершил прогулку по маршруту: от дома по горизонтальной тропинке до подъема на гору, подъем на вершину горы и спуск с нее по тому же склону, возвращение по тропинке домой. Путь от дома до подъёма на гору не менее, чем в два раза превышает путь по склону горы. По горизонтальной тропе Петя шел со скоростью 4 км/час, на подъеме – 0,5км/час, на спуске – 5км/час. Какой наименьший при этих условиях путь мог пройти Петя, если спустя 16 часов он вернулся домой?

Ответ: 30 км.

2. Решить уравнение $4+4:(1+4:(1+4:(1+4:(5x-24))))=x$.

Ответ: $x=\dfrac{52}{9}$.

3. Про два двузначных, целых, положительных числа a и b известно, что 1) одно из них больше другого на 12; 2) в их десятичной записи одна одинаковая цифра; 3) сумма цифр одного числа на 3 больше суммы цифр другого. Найти эти числа.

Ответ: $a=11t+10,\ b=11t-2,\ t=2,3,\dots,8$;

$$\tilde{a}=11s+1,\quad \tilde{b}=11s+13,\quad s=1,2,3,\dots,6.$$

4. Обозначим через $s(a)$ сумму цифр в десятичной записи натурального числа a. Найти все числа a, для которых $a^2+s(a)=4776$.

Ответ: $a=69$.

5. Точка P расположена на стороне AB квадрата $ABCD$ так, что $AP : PB = 1:4$. Точка Q лежит на стороне BC квадрата и делит ее в отношении $BQ : QC = 5$. Прямые DP и AQ пересекаются в точке E. Найти отношение длин $AE : EQ$.

Ответ: $AE : EQ = 6 : 29$.