

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом» 2021, математика,
11 класс.

Вариант № 1

1. Сколько раз за сутки секундная и минутная стрелки часов образуют с часовой стрелкой угол в 30° ? (сутки начинаются в полночь).
2. Решить неравенство: $\frac{\sin^2 x}{|\cos 2x|} \leq 2|\sin x| - |\cos 2x|$.
3. Сколько существует пар натуральных чисел (a, b) , у которых $\text{НОК}(a, b) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 = 17640$, а $\text{НОД}(a, b) = 12$? Среди всех таких пар указать ту, для которой $a + b$ принимает минимально возможное значение и найти это значение (пары (a, b) и (b, a) считать за одну).
4. На столе лежит колода игральных карт 36 листов. Два опытных игрока Кондрат и Игнат (каждый из них всегда делает правильный ход) начинают игру по следующим правилам. В начале игры каждый из игроков совершенно случайно называет одну из цифр от 1 до 3. Их сумма определяет (на всю игру) максимальное число карт, которые при очередном ходе игроки могут забрать со стола. Игрок не может при своем ходе не взять со стола карту. Выигрывает тот из игроков, кто сможет забрать последнюю карту в колоде. Начинает всегда Кондрат. Какая вероятность победы Игната?
5. При каких a уравнение $\arcsin(\cos x) = \cos(\arcsin(x - a))$ имеет единственное решение?
6. На ребре AD основания куба $ABCD A' B' C' D'$ (AA', BB', CC', DD' параллельные боковые ребра) расположена точка M так, что $AM : AD = 1 : 3$. Через точку M и вершины A' и C' куба проведена плоскость P . Найти расстояние до плоскости P точки N , расположенной на ребре AB так, что $AN : AB = 1 : 2$, если длина ребра куба равна $2\sqrt{19}$.

Вариант № 2

1. Сколько раз за сутки секундная и часовая стрелки часов лежат на одной прямой, а минутная стрелка ей перпендикулярна? (сутки начинаются в полночь).
2. Решить неравенство: $\frac{\sin^2 2x}{|\cos 3x|} \leq 2|\sin 2x| - |\cos 3x|$.
3. Сколько существует пар натуральных чисел (a, b) , у которых $\text{НОК}(a, b) = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 = 1372140$, а $\text{НОД}(a, b) = 54$? Среди всех таких пар указать ту, для которой $a + b$ принимает минимально возможное значение и найти это значение (пары (a, b) и (b, a) считать за одну).
4. На столе лежит колода игральных карт 52 листа. Два опытных игрока Кондрат и Игнат (каждый из них всегда делает правильный ход) начинают игру по следующим правилам. В начале игры каждый совершенно случайно называет одну из цифр от 1 до 3. Их сумма определяет (на всю игру) максимальное число карт, которые при очередном ходе игрок может забрать со стола. Игрок не может при своем ходе не взять со стола карту. Выигрывает тот из игроков, кто сможет забрать последнюю карту в колоде. Начинает всегда Кондрат. Какая вероятность победы Игната?
5. При каких a уравнение $\arccos(\sin x) = \sin(\arccos(x - a))$ имеет ровно два решения?

6. На ребре AD основания куба $ABCD A' B' C' D'$ (AA' , BB' , CC' , DD' параллельные боковые ребра) расположена точка M так, что $AM : AD = 1 : 2$. Через точку M и вершины A' и C' куба проведена плоскость P . Найти расстояние до плоскости P точки N , расположенной на ребре AB так, что $AN : AB = 1 : 4$, если длина ребра куба равна 2.

Вариант № 3

1. Сколько раз за сутки секундная, минутная и часовая стрелки часов лежат на одной прямой? (сутки начинаются и заканчиваются в полночь).

2. Решить неравенство: $\frac{\cos^2 3x}{|\sin x|} \leq 2|\cos 3x| - |\sin x|$.

3. Сколько существует пар натуральных чисел (a, b) , у которых $HOK(a, b) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 3603600$, а $НОД(a, b) = 30$? Среди всех таких пар указать ту, для которой $a + b$ принимает минимальное возможное значение и найти это значение (пары (a, b) и (b, a) считать за одну).

4. На столе лежит колода игральных карт 36 листов. Два опытных игрока Кондрат и Игнат (каждый из них всегда делает правильный ход) начинают игру по следующим правилам. В начале игры каждый совершенно случайно называет одну из цифр от 1 до 4. Их сумма определяет (на всю игру) максимальное число карт, которые при очередном ходе игрок может забрать со стола. Игрок не может при своем ходе не взять со стола карту. Выигрывает тот из игроков, кто сможет забрать последнюю карту в колоде. Начинает всегда Кондрат. Какая вероятность победы Игната?

5. При каких a уравнение $\arcsin(\sin x) = \sin(|\arcsin(x - a)|)$ не имеет решений?

6. На ребре AD основания куба $ABCD A' B' C' D'$ (AA' , BB' , CC' , DD' параллельные боковые ребра) расположена точка M так, что $AM : AD = 3 : 4$. Через точку M и вершины A' и C' куба проведена плоскость P . Найти расстояние до плоскости P точки N , расположенной на ребре AB так, что $AN : AB = 1 : 3$, если длина ребра куба равна $3\sqrt{41}$.

Вариант № 4

1. Сколько раз за сутки секундная и минутная стрелки на часах перпендикулярны часовой стрелке? (сутки начинаются и заканчиваются в полночь).

2. Решить неравенство: $\frac{\cos^2 4x}{|\sin 3x|} \leq 2|\cos 4x| - |\sin 3x|$.

3. Сколько существует пар натуральных чисел (a, b) , у которых $HOK(a, b) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 13 = 10296$, а $НОД(a, b) = 66$? Среди всех таких пар указать ту, для которой $a + b$ принимает минимальное возможное значение и найти это значение (пары (a, b) и (b, a) считать за одну).

4. На столе лежит колода игральных карт 52 листа. Два опытных игрока Кондрат и Игнат (каждый из них всегда делает правильный ход) начинают игру по следующим правилам. В начале игры каждый совершенно случайно называет одну из цифр от 1 до 4. Их сумма определяет (на всю игру) максимальное число карт, которые при очередном ходе игрок может забрать со стола. Игрок не может при своем ходе не взять со стола карту. Выигрывает тот из игроков, кто сможет забрать последнюю карту в колоде. Начинает всегда Кондрат. Какая вероятность победы Игната?

5. При каких a уравнение $\arccos(\cos x) = 1 - |\cos(\arccos(x - a))|$ имеет бесконечное число решений?

6. На ребре AD основания куба $ABCD A' B' C' D'$ (AA', BB', CC', DD' параллельные боковые ребра) расположена точка M так, что $AM : AD = 2 : 5$. Через точку M и вершины A' и C' куба проведена плоскость P . Найти расстояние до плоскости P точки N , расположенной на ребре AB так, что $AN : AB = 3 : 4$, если длина ребра куба равна $12\sqrt{6}$.

Решения и ответы

Вариант 1

Задача 1 Ответ: 4 раза.

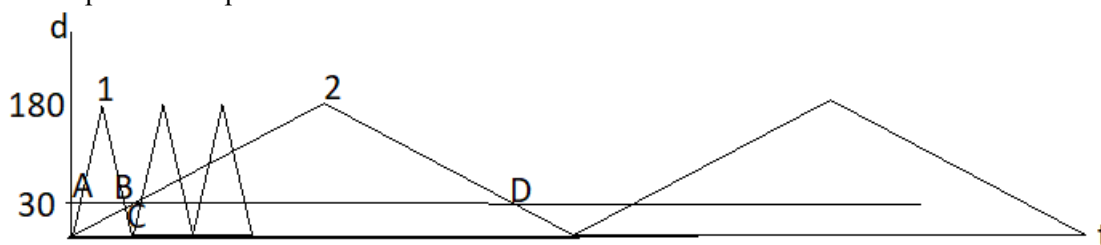
Решение. Скорости движения каждой из стрелок в град/мин следующие:

часовая – 0,5, минутная – 6, секундная – 360

Относительные скорости:

минутная относительно часовой – 5,5, секундная относительно часовой – 359,5.

Графики зависимости угла между минутной и часовой (2), а также секундной и часовой стрелками (1) от времени изображены на рис



Рис

Через $\alpha(t)$ обозначим угол между секундной и часовой стрелками. Ее период $T_1 = \frac{360}{359,5}$, угловой коэффициент $k_1 = 359,5$ на интервале $t \in (0; T_1 / 2)$ и $k_1 = -359,5$ на интервале $t \in (T_1 / 2; T_1)$. Моменты времени, для которых $\alpha(t) = 30$, описываются двумя сериями:

$$t_k^1 = \frac{30}{359,5} + \frac{360}{359,5} k, \quad k = 0, 1, 2, \dots (*)$$

$$t_k^2 = \frac{330}{359,5} + \frac{360}{359,5} k, \quad k = 0, 1, 2, \dots (**)$$

Через $\beta(t)$ обозначим угол между минутной и часовой стрелками. Ее период $T_2 = \frac{360}{5,5}$, угловой коэффициент $k_2 = 5,5$ на интервале $t \in (0; T_2 / 2)$ и $k_2 = -5,5$ на интервале $t \in (T_2 / 2; T_2)$. Моменты времени, для которых $\beta(t) = 30$, описываются двумя сериями:

$$\tau_m^1 = \frac{30}{5,5} + \frac{360}{5,5} m, \quad m = 0, 1, 2, \dots (***)$$

$$\tau_m^2 = \frac{330}{5,5} + \frac{360}{5,5} m, \quad m = 0, 1, 2, \dots (****)$$

Условие $\alpha(t) = \beta(t) = 30$ в четырех случаях.

Случай 1. $t_k^1 = \tau_m^1$

$$\frac{30}{359,5} + \frac{360}{359,5} k = \frac{30}{5,5} + \frac{360}{5,5} m$$

$$719m - 11k = -59$$

Решаем уравнение в целых числах:

$$\begin{cases} k = 719s - 60 \\ m = 11s - 1 \end{cases}$$

Тогда

$$\tau_m^1 = \frac{30}{5,5} + \frac{360}{5,5}(11s - 1) = 720s - 60, s = 1, 2, 3, \dots$$

В сутках 1440 минут, поэтому

$$720s - 60 \leq 1440 \Rightarrow s \in \{1, 2\}$$

т.е. случай 1 реализуется за сутки два раза спустя 660 и 1380 минут.

Случай 2. $t_k^1 = \tau_m^2$

$$\frac{30}{359,5} + \frac{360}{359,5}k = \frac{330}{5,5} + \frac{360}{5,5}m$$

$$66k - 4314m = 3949$$

Здесь решений нет так как слева стоит четное число, а справа нечетное число.

Случай 3. $t_k^2 = \tau_m^1$

$$\frac{330}{359,5} + \frac{360}{359,5}k = \frac{30}{5,5} + \frac{360}{5,5}m$$

$$66k - 4314m = 299$$

Случай также не реализуется так как слева стоит четное число, а справа нечетное число.

Случай 4. $t_k^2 = \tau_m^2$

$$\frac{330}{359,5} + \frac{360}{359,5}k = \frac{330}{5,5} + \frac{360}{5,5}m$$

$$11k - 719m = 649$$

Решаем уравнение в целых числах:

$$\begin{cases} k = 59 + 719s \\ m = 11s \end{cases}$$

За сутки (1440 мин) случай 4 реализуется два раза при $s = 0$ и $s = 1$ спустя 60 и 780 минут после начала суток.

Задача 2 Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$

Решение. После преобразований получаем

$$\frac{\sin^2 x - 2|\sin x||\cos 2x| + |\cos 2x|^2}{|\cos 2x|} \leq 0$$

$$\frac{(|\sin x| - |\cos 2x|)^2}{|\cos 2x|} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |\sin x| = |\cos 2x| \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases}$$

Далее решаем уравнение

$$|\sin x| = |\cos 2x|, |\sin x| = |1 - 2\sin^2 x|, \pm \sin x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\begin{cases} 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \\ 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} \sin x = -1, \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = 1, \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}$$

Все решения удовлетворяют условию $\cos 2x \neq 0$ и могут быть объединены в одну серию

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Задача 3 Ответ: 1) восемь пар; 2) $(30; 49)$, $(a+b)_{\min} = 948$

Решение

$$НОК(a, b) / НОД(a, b) = 17640 : 12 = 1470 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$$

Искомые числа a и b , имеющие заданные наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель, можно представить в виде:

$$a = НОД(a, b) \cdot a_1 = 12 \cdot a_1, \quad b = НОД(a, b) \cdot b_1 = 12 \cdot b_1,$$

где a_1, b_1 – произвольные взаимно простые числа, для которых

$$a_1 \cdot b_1 = НОК(a, b) / НОД(a, b) = 1470.$$

Каждое число a_1 равно произведению элементов выборки из четырех чисел $2, 3, 5, 7^2$ по $0, 1, 2, 3$ и 4 , а

$b_1 = 1470 : a_1$. Число таких выборок равно

$$C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^4.$$

В условии предполагается, что пары (a, b) неупорядоченные, т.е. $(a, b) = (b, a)$, поэтому общее число пар должно быть уменьшено вдвое.

Функция $y = x + \frac{1470}{x}$ принимает наименьшее значение $x = \tilde{x} = \sqrt{1470} \approx 38,3$, поэтому a_1 , при котором

$a_1 + b_1 \rightarrow \min$, должно наименее отклоняться от $\tilde{x}$. Есть два претендента:

$$a_1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \rightarrow b_1 = 49 \rightarrow a_1 + b_1 = 79 \rightarrow a + b = 12 \cdot 79 = 948$$

и $a_1 = 49, b_1 = 30$, дающий тот же результат.

Задача 4 Ответ $\frac{5}{9}$

Решение

Введем событие A – выигрывает Игнат. Количество упорядоченных случайных пар

$$(m, n), m = 1, 2, 3; n = 1, 2, 3$$

равно девяти. Случайная величина $m + n$ принимает значения от 2 до 6 с вероятностями

$m + n$	2	3	4	5	6
p	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9

Гипотеза $H_1 : m + n = 2, P(H_1) = \frac{1}{9}$

Если игрок при своем ходе сможет оставить на столе число карт кратное трем, то ему обеспечен выигрыш. В противном, это сможет сделать соперник и обеспечить свой выигрыш. При первом ходе Кондрат этого сделать не может, следовательно, $P(A / H_1) = 1$

Гипотеза $H_2 : m + n = 3, P(H_2) = \frac{2}{9}$

Если игрок при своем ходе сможет оставить на столе число карт кратное четырем, то ему обеспечен выигрыш. В противном, это сможет сделать соперник и обеспечить свой выигрыш. При первом ходе Кондрат этого сделать не может, следовательно, $P(A / H_2) = 1$

Гипотеза $H_3 : m + n = 4, P(H_3) = \frac{3}{9}$

Если игрок при своем ходе сможет оставить на столе число карт кратное пяти, то ему обеспечен выигрыш. В противном, это сможет сделать соперник и обеспечить свой выигрыш. При первом ходе Кондрат этого сделать может, забрав со стола одну карту, следовательно, $P(A / H_3) = 0$

Гипотеза $H_4 : m + n = 5, P(H_4) = \frac{2}{9}$

Если игрок при своем ходе сможет оставить на столе число карт кратное шести, то ему обеспечен выигрыш. В противном, это сможет сделать соперник и обеспечить свой выигрыш. При первом ходе Кондрат этого сделать не может, следовательно, $P(A / H_4) = 1$

Гипотеза $H_5 : m + n = 6, P(H_5) = \frac{1}{9}$

Если игрок при своем ходе сможет оставить на столе число карт кратное семи, то ему обеспечен выигрыш. В противном, это сможет сделать соперник и обеспечить свой выигрыш. При первом ходе Кондрат этого сделать может, забрав со стола одну карту, следовательно, $P(A / H_5) = 0$

Наконец, $P(A) = \sum_1^5 P(H_i)P(A / H_i) = \frac{1+2+2}{9} = \frac{5}{9}$

Задача 5 Ответ:

$$a \in \left[-\frac{\pi}{2} - 1 + 2\pi k; -\frac{\pi}{2} + 1 + 2\pi k \right) \cup \left(\frac{\pi}{2} - 1 + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 1 + 2\pi k \right] \cup \left\{ -\frac{\pi}{2} + \sqrt{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} - \sqrt{2} + 2\pi k \right\}, k \in \mathbb{Z}$$

Решение

Функции $y_1 = \arcsin(\cos x)$ имеет период 2π и ее график на периоде $[-\pi; \pi]$ изображен ниже

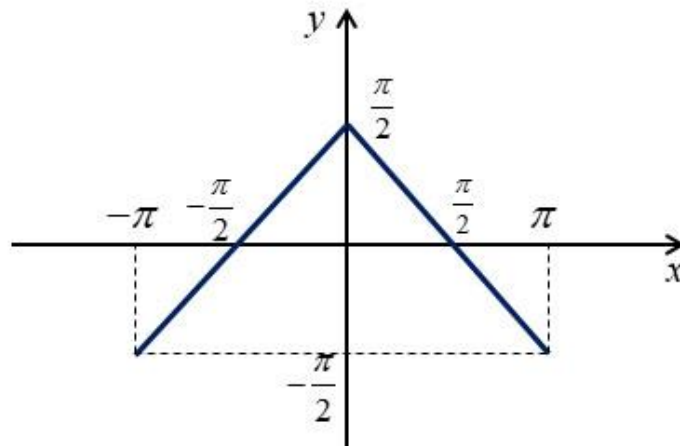
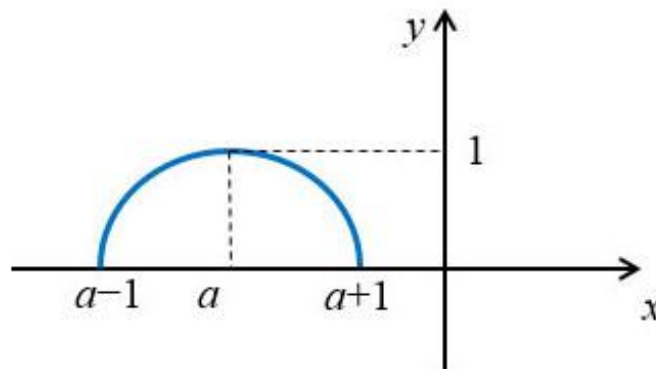
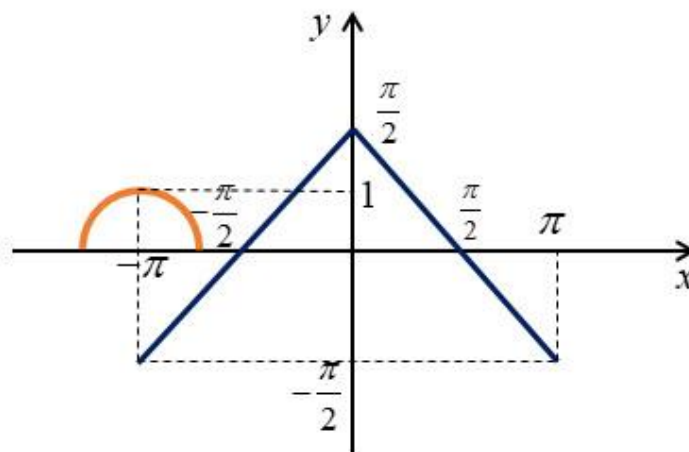


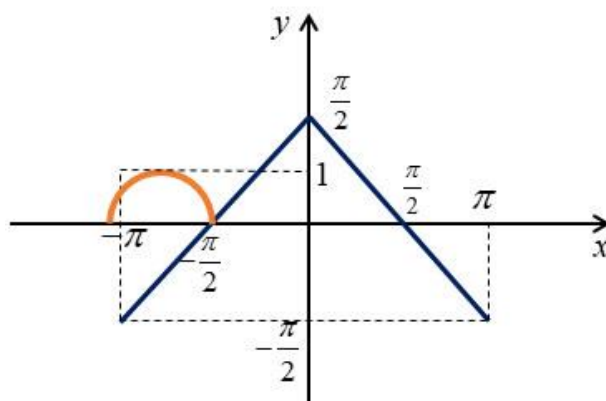
График второй функции $y_2 = \cos(\arcsin(x - a)) = \sqrt{1 - (x - a)^2}$ (полуокружность):



Ниже приведено взаимное расположение обоих графиков при $a = -\pi$



При увеличении параметра a график второй функции перемещается вправо вдоль оси абсцисс. Ввиду периодичности первой функции достаточно проследить изменение взаимного расположения графиков на участке длиной в период, т.е. при $-\pi \leq a \leq \pi$. Найдем критические значения параметра при которых происходит качественное изменение взаимной конфигурации графиков. Первое критическое значение параметра отвечает положению, когда при сдвиге второго графика вправо, он соприкоснется с графиком первой функции



Так как правый конец второго графика имеет абсциссу, равную $a+1$, то это положение определяется равенством

$$a+1 = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow a = -\frac{\pi}{2} - 1$$

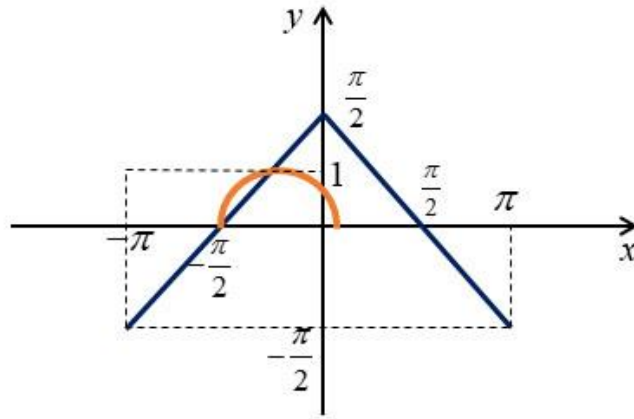
На участке

$$-\pi \leq a < -\frac{\pi}{2} - 1$$

рассматриваемое уравнение решений не имеет, а при

$$a = -\frac{\pi}{2} - 1$$

оно имеет единственное решение. Следующее критическое значение параметра отвечает случаю, когда левый конец второго графика совпадет с точкой $-\pi/2$



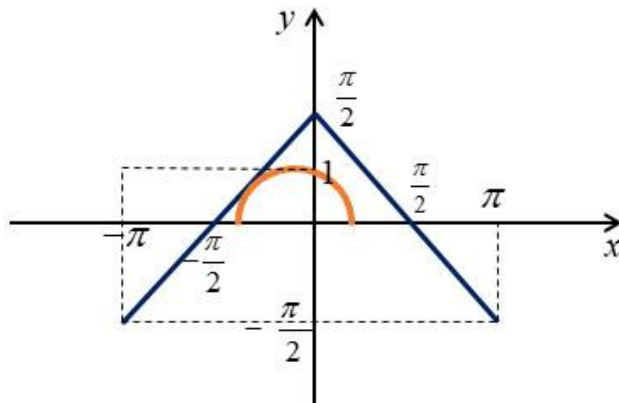
Это положение определяется равенством

$$a - 1 = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow a = -\frac{\pi}{2} + 1$$

На участке

$$-\frac{\pi}{2} - 1 \leq a < -\frac{\pi}{2} + 1$$

уравнение имеет одно решение. При дальнейшем увеличении параметра уравнение будет иметь два решения до того момента, когда график второй кривой коснется графика первой кривой слева



Найдем значение параметра, отвечающее этому случаю касания. В точке касания производные обеих функций равны

$$-\frac{x-a}{\sqrt{1-(x-a)^2}} = 1$$

Из этого уравнения находим абсциссу точки касания

$$x = a - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Значение второй функции в этой точке равно $1/\sqrt{2}$. На рассматриваемом участке график первой функции задается уравнением

$$y = x + \frac{\pi}{2}$$

Подставляя сюда координаты точки касания

$$x = a - \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

находим нужное значение параметра

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = a - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2}$$

$$a = -\frac{\pi}{2} + \sqrt{2}$$

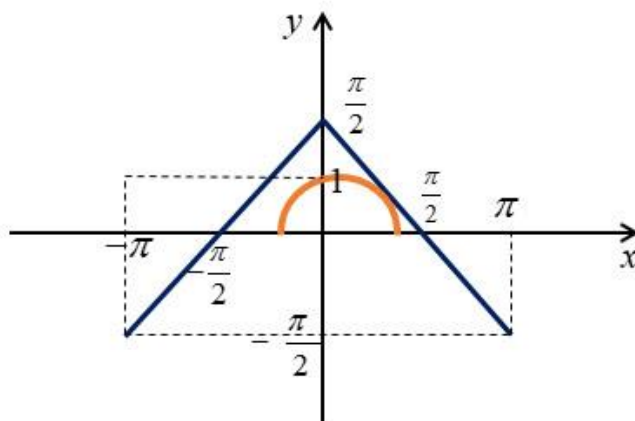
Таким образом, на участке

$$a \in \left[-\frac{\pi}{2} + 1, -\frac{\pi}{2} + \sqrt{2} \right)$$

уравнение имеет два решения, а при

$$a = -\frac{\pi}{2} + \sqrt{2}$$

оно имеет одно решение. При дальнейшем увеличении параметра (и движении графика второй функции дальше вправо) уравнение не будет иметь решений до тех пор, пока график второй функции не коснется правого участка графика первой функции



Соответствующее значение параметра в силу симметрии со случаем первого касания должно быть противоположным по знаку

$$a = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}$$

Следовательно, при

$$-\frac{\pi}{2} + \sqrt{2} < a < \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}$$

уравнение не имеет решений, а при

$$a = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}$$

решение уравнения единственно. При дальнейшем движении графика второй функции вправо конфигурация меняется симметрично рассмотренному раньше, а критические значения параметра меняют знак, т.е. при

$$a \in \left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}, \frac{\pi}{2} - 1 \right]$$

уравнение имеет два решения, а при

$$\frac{\pi}{2} - 1 < a \leq \frac{\pi}{2} + 1$$

одно решение и, наконец, при

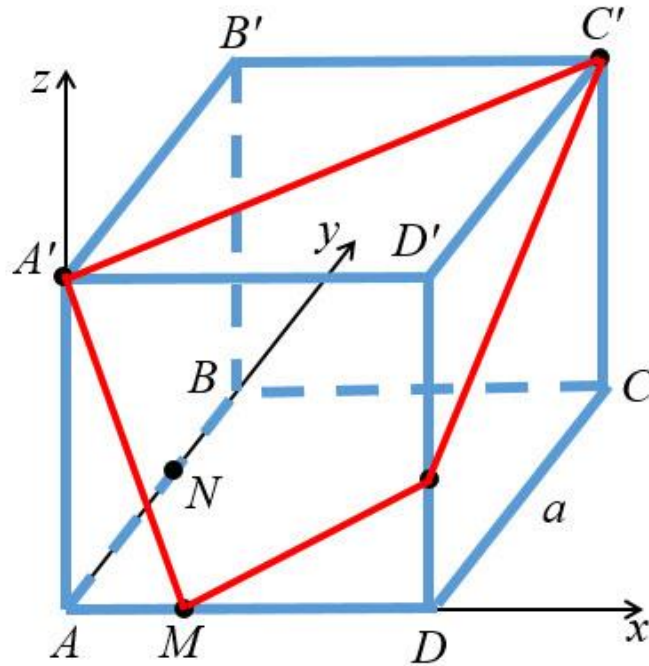
$$\frac{\pi}{2} + 1 < a \leq \pi$$

Решений снова не будет. В данном варианте необходимо определить условия единственности решения, с учетом 2π -периодичности это будут следующие значения

$$a \in \left[-\frac{\pi}{2} - 1 + 2\pi k; -\frac{\pi}{2} + 1 + 2\pi k \right) \cup \left(\frac{\pi}{2} - 1 + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 1 + 2\pi k \right] \cup \left\{ -\frac{\pi}{2} + \sqrt{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} - \sqrt{2} + 2\pi k \right\}, k \in \mathbb{Z}$$

Задача 6 Ответ: 5.

Решение. Введем декартову систему координат с началом координат в точке A , ось абсцисс направим вдоль AD , ось ординат – на плоскости основания $ABCD$ перпендикулярно оси абсцисс и ось аппликат перпендикулярно плоскости основания



Обозначим ребро куба через a , отношения

$$\frac{AM}{AD} = \lambda, \quad \frac{AN}{AB} = \mu$$

Выписываем координаты нужных нам точек

$$A'(0, 0, a), \quad M(0, \lambda a, 0), \quad N(0, \mu a, 0), \quad C'(a, a, a)$$

Находим координаты нужных векторов

$$\overrightarrow{A'M} = \{\lambda a, 0, 0\}, \quad \overrightarrow{A'C'} = \{a, a, 0\}$$

Вычисляем вектор, перпендикулярный плоскости P

$$\vec{N} = \overrightarrow{A'M} \times \overrightarrow{A'C'} = \{a^2, -a^2, \lambda a^2\} = a^2 \{1, -1, \lambda\}$$

Находим уравнение плоскости P

$$1 \cdot (x - 0) - 1 \cdot (y - 0) - \lambda \cdot (z - a) = 0$$

$$x - y + \lambda z - \lambda a = 0$$

Находим расстояние d от точки N до плоскости P

$$d = \frac{|0 - \mu a + 0 - \lambda a|}{\sqrt{1 + 1 + \lambda^2}} = \frac{(\lambda + \mu)a}{\sqrt{2 + \lambda^2}}$$

В нашем варианте

$$\lambda = \frac{1}{3}, \mu = \frac{1}{2}, a = 2\sqrt{19}$$

и соответственно

$$d = \frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) 2\sqrt{19}}{\sqrt{2 + \frac{1}{9}}} = \frac{5 \cdot 2\sqrt{19} \cdot 3}{6\sqrt{19}} = 5$$

Вариант 2

Задача 1 Ответ: ни разу

$$\text{Задача 2 Ответ: } \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}, n \in Z, n \neq 5k+1, k \in Z \\ x = -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}, n \in Z, n \neq 5k+4, k \in Z \end{cases}$$

Задача 3 Ответ: 1) 16 пар; 2) (6534; 11340), $(a+b)_{\min} = 17874$

Задача 4 Ответ: $\frac{2}{9}$

Задача 5 Ответ: $a \in \left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + \sqrt{2} + 2\pi k \right), k \in Z$

Задача 6 Ответ: 1.

Вариант 3

Задача 1 Ответ: 4 раза (исключая конечное положение).

$$\text{Задача 2 Ответ: } \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z \\ x = \pm \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z \end{cases}$$

Задача 3 Ответ: 1) 32 пары; 2) (9360; 11550), $(a+b)_{\min} = 20910$

Задача 4 Ответ: $\frac{1}{2}$

Задача 5 Ответ: $a \in (-\pi + 2\pi k, 2\pi k), k \in Z$

Задача 6 Ответ: 13.

Вариант 4

Задача 1 Ответ: 4 раза.

$$\text{Задача 2 Ответ: } x = \pm \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi n}{7}, n \in Z$$

Задача 3 Ответ: 1) 4 пары; 2) (792; 858), $(a+b)_{\min} = 1650$

Задача 4 Ответ: $\frac{1}{8}$

Задача 5 Ответ: $a = \pm 1 + 2\pi n, n \in Z$

Задача 6 Ответ: 23.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом» 2021, математика,
11 класс.

Вариант № 1

1. Петя написал в своей тетради многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и предложил Васе угадать его степень. Вася задал Пете два вопроса: «Чему равно значение многочлена при $x = -3$?» и «Чему равен остаток от деления многочлена на $(x - n)$, где n – его степень?». Получив ответы 1 и 6 соответственно, Вася уверенно назвал степень многочлена. Как он это сделал? Какова степень многочлена?
2. При каких целых n функция $f(x) = \sin nx \cdot \cos \frac{7x}{n^2}$ имеет период $T = 9\pi$?
3. Представить число 2021 в виде суммы трех взаимно простых чисел.
4. На детском новогоднем празднике раздавали шоколадные и фруктовые конфеты. Дети подходили к деду Морозу, залезали рукой в его мешок и вынимали из него по две конфеты. Когда Петя подошел к мешку, он понял, что шоколадных конфет в мешке почти не осталось и вероятность получить две шоколадные конфеты в три раза меньше, чем шоколадную и фруктовую. Какое наименьшее число шоколадных конфет могло находиться в мешке деда Мороза в момент, когда Петя забирал свои конфеты, если после него еще не менее 10 детей получили свои конфеты до того, как мешок опустел?
5. При каких α система уравнений
$$\begin{cases} (x - 4 \cos \alpha)^2 + (y - 4 \sin \alpha)^2 = 1 \\ (x - 5 \cos 2\alpha)^2 + (y - 5 \sin 2\alpha)^2 = 9 \end{cases}$$
 имеет единственное решение?
6. Длины всех ребер (боковых и основания) тетраэдра $ABCD$ равны 1. На ребре AB расположена точка M так, что $AM : AB = 1 : 3$. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми CM и AD .

Вариант № 2

1. Петя написал в своей тетради многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и предложил Васе угадать его степень. Вася задал Пете два вопроса: «Чему равно значение многочлена при $x = -2$?» и «Чему равен остаток от деления многочлена на $(x - n)$, где n – его степень?». Получив ответы 2 и 9 соответственно, Вася уверенно назвал степень многочлена. Как он это сделал? Какова степень многочлена?
2. При каких целых n функция $f(x) = \cos nx \cdot \cos \frac{6x}{n^2}$ имеет период $T = 12\pi$?
3. Представить число 2021 в виде суммы четырех взаимно простых чисел.
4. На детском новогоднем празднике раздавали шоколадные и фруктовые конфеты. Дети подходили к деду Морозу, залезали рукой в его мешок и вынимали из него по две конфеты. Когда Петя подошел к мешку, он понял, что шоколадных конфет в мешке почти не осталось и вероятность получить две шоколадные конфеты в пять раз меньше, чем шоколадную и фруктовую. Какое наименьшее число фруктовых конфет могло находиться в мешке деда Мороза в момент, когда Петя забирал свои конфеты, если после него еще не менее 20 детей получили свои конфеты до того, как мешок опустел?
5. При каких α система уравнений
$$\begin{cases} (x - 5 \cos \alpha)^2 + (y - 5 \sin \alpha)^2 = 1 \\ (x - 6 \cos 2\alpha)^2 + (y - 6 \sin 2\alpha)^2 = 16 \end{cases}$$
 имеет ровно два решения?

6. Длины всех ребер (боковых и основания) тетраэдра $ABCD$ равны 1. На ребре AB расположена точка M так, что $AM : AB = 1 : 4$. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми CM и AD .

Вариант № 3

1. Петя написал в своей тетради многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и предложил Васе угадать его степень. Вася задал Пете два вопроса: «Чему равно значение многочлена при $x = -1$?» и «Чему равен остаток от деления многочлена на $(x - n)$, где n – его степень?». Получив ответы 3 и 10 соответственно, Вася уверенно назвал степень многочлена. Как он это сделал? Какова степень многочлена?

2. При каких целых n функция $f(x) = \cos nx \cdot \sin \frac{15x}{n^2}$ имеет период $T = 5\pi$?

3. Представить число 2021 в виде суммы пяти взаимно простых чисел.

4. На детском новогоднем празднике раздавали шоколадные и фруктовые конфеты. Дети подходили к деду Морозу, залезали рукой в его мешок и вынимали из него по две конфеты. Когда Петя подошел к мешку, он понял, что шоколадных конфет в мешке почти не осталось и вероятность получить две шоколадные конфеты в семь раз меньше, чем шоколадную и фруктовую. Какое наименьшее число фруктовых конфет могло находиться в мешке деда Мороза в момент, когда Петя забирал свои конфеты, если после него еще не менее 30 детей получили свои конфеты до того, как мешок опустел?

5. При каких α система уравнений
$$\begin{cases} (x - 6 \cos \alpha)^2 + (y - 6 \sin \alpha)^2 = 4 \\ (x - 7 \cos 2\alpha)^2 + (y - 7 \sin 2\alpha)^2 = 16 \end{cases}$$
 не имеет решений?

6. Длины всех ребер (боковых и основания) тетраэдра $ABCD$ равны 1. На ребре AB расположена точка M так, что $AM : AB = 2 : 3$. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми CM и AD .

Вариант № 4

1. Петя написал в своей тетради многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и предложил Васе угадать его степень. Вася задал Пете два вопроса: «Чему равно значение многочлена при $x = -4$?» и «Чему равен остаток от деления многочлена на $(x - n)$, где n – его степень?». Получив ответы 4 и 17 соответственно, Вася уверенно назвал степень многочлена. Как он это сделал? Какова степень многочлена?

2. При каких целых n функция $f(x) = \sin nx \cdot \sin \frac{21x}{n^2}$ имеет период $T = 7\pi$?

3. Представить число 2021 в виде суммы шести взаимно простых чисел.

4. На детском новогоднем празднике раздавали шоколадные и фруктовые конфеты. Дети подходили к деду Морозу, залезали рукой в его мешок и вынимали из него по две конфеты. Когда Петя подошел к мешку, он понял, что шоколадных конфет в мешке почти не осталось и вероятность получить две шоколадные конфеты в девять раз меньше, чем шоколадную и фруктовую. Какое наименьшее число шоколадных конфет могло находиться в мешке деда Мороза в момент, когда Петя забирал свои конфеты, если после него еще не менее 25 детей получили свои конфеты до того, как дед Мороз съел сам последнюю конфету?

5. При каких α система уравнений
$$\begin{cases} (x - 7 \cos \alpha)^2 + (y - 7 \sin \alpha)^2 = 9 \\ (x - 8 \cos 2\alpha)^2 + (y - 8 \sin 2\alpha)^2 = 25 \end{cases}$$
 имеет решения?

6. Длины всех ребер (боковых и основания) тетраэдра $ABCD$ равны 1. На ребре AB расположена точка M так, что $AM : AB = 1 : 2$. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми CM и AD .

Вариант 1

Задача 1 Ответ: $n=2$

Решение. Так как

$$x_1^k - x_2^k = (x_1 - x_2)(x_1^{k-1} + x_1^{k-2}x_2 + \dots + x_1x_2^{k-2} + x_2^{k-1}),$$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

тогда

$$P(x_1) - P(x_2) = a_n(x_1^n - x_2^n) + a_{n-1}(x_1^{n-1} - x_2^{n-1}) + \dots + a_1(x_1 - x_2)$$

и поэтому при целых x_1, x_2 разность $P(x_1) - P(x_2)$ делится на $x_1 - x_2$.По теореме Безу $P(n)=6$, кроме того по условию задачи $P(-3)=1$, следовательно, величина

$$P(n) - P(-3) = 6 - 1 = 5$$

делится на $n+3$. Так как 5 – простое число, то $n+3$ равно 1 или 5. Ввиду того, что число n натуральное у нас только один вариант: $n+3=5$ и $n=2$.Задача 2 Ответ: $\pm 1, \pm 3$ Решение. Условие задачи равносильно тому, что при всех вещественных x

$$\sin n(x + 9\pi) \cos \frac{7(x + 9\pi)}{n^2} = \sin nx \cos \frac{7x}{n^2}$$

1) n чётно, в этом случае имеем равенство

$$\sin nx \cos \frac{7(x + 9\pi)}{n^2} = \sin nx \cos \frac{7x}{n^2}$$

$$\sin nx \left(\cos \frac{7x}{n^2} - \cos \frac{7x + 63\pi}{n^2} \right) = 0$$

$$2 \sin nx \sin \left(\frac{7x}{n^2} + \frac{63\pi}{2n^2} \right) \sin \frac{63\pi}{2n^2} = 0$$

Найдем нули первых двух синусов

$$\sin nx = 0 \Leftrightarrow nx = \pi k \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \frac{x}{\pi} = k \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin \left(\frac{7x}{n^2} + \frac{63\pi}{2n^2} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{7x}{n^2} + \frac{63\pi}{2n^2} = \pi m \ (m \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \frac{x}{\pi} = \frac{2n^2 m - 63}{14} \ (m \in \mathbb{Z})$$

В обоих случаях отношение x к π рационально. Поэтому найдется такое значение x , при котором два первых синуса не обращаются в ноль (например, $x=\pi^2$). Отсюда следует, что условие задачи равносильно равенству

$$\sin \frac{63\pi}{2n^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{63\pi}{2n^2} = \pi k \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow 63 = 2n^2 k \ (k \in \mathbb{Z})$$

которое не может быть выполнено так как число 63 нечётно.

2) n нечётно, в этом случае имеем равенство

$$-\sin nx \cos \frac{7(x + 9\pi)}{n^2} = \sin nx \cos \frac{7x}{n^2}$$

$$\sin nx \left(\cos \frac{7x}{n^2} + \cos \frac{7x + 63\pi}{n^2} \right) = 0$$

$$\sin nx \cos \left(\frac{7x}{n^2} + \frac{63\pi}{2n^2} \right) \cos \frac{63\pi}{2n^2} = 0$$

Найдем нули первых двух множителей

$$\sin nx = 0 \Leftrightarrow nx = \pi k \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \frac{x}{\pi} = k \ (k \in \mathbb{Z}) -$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{7x}{n^2} + \frac{63\pi}{2n^2}\right) = 0 &\Leftrightarrow \frac{7x}{n^2} + \frac{63\pi}{2n^2} = \frac{\pi}{2} + \pi m \ (m \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{\pi} = \frac{(2m+1)n^2 - 63}{14} \ (m \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

В обоих случаях отношение x к π рационально. Поэтому и в этом случае найдется такое значение x , при котором два первых множителя не обращаются в ноль, а условие задачи равносильно равенству

$$\begin{aligned} \cos \frac{63\pi}{2n^2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{63\pi}{2n^2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{63}{n^2} = 2k + 1 \ (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Так как $63/n^2$ – целое, то

$$n \in \{\pm 1, \pm 3\}$$

Задача 3 Ответ: Например, $2021=499+509+1013$.

Решение. По свойству НОД

$$\begin{aligned} \text{НОД}(499, 509) &= \text{НОД}(499, 509 - 499) = \text{НОД}(499, 10) \\ \text{НОД}(499, 1013) &= \text{НОД}(499, 1013 - 499) = \\ &= \text{НОД}(499, 514) = \text{НОД}(499, 514 - 499) = \text{НОД}(499, 15) \\ \text{НОД}(509, 1013) &= \text{НОД}(509, 1013 - 509) = \\ &= \text{НОД}(509, 504) = \text{НОД}(509 - 504, 504) = \text{НОД}(5, 504) \end{aligned}$$

Так как 499 не делится ни на 2, ни на 5, то $\text{НОД}(499, 509)=1$. Так как 499 не делится ни на 3, ни на 5, то $\text{НОД}(499, 1013)=1$. Так как 504 не делится на 5, то $\text{НОД}(509, 504)=1$. Таким образом, все три слагаемых в сумме взаимно просты.

Задача 4 Ответ не меньше 11.

Решение. Пусть в мешке оставалось x шоколадных конфет и y фруктовых.

Найдем условие, когда вероятность получить две шоколадные конфеты в три раза меньше, чем шоколадную и фруктовую. Вероятность получить две шоколадные конфеты

$$p_{ш} = \frac{x(x-1)}{(x+y)(x+y-1)}$$

Вероятность получить шоколадную и фруктовую конфеты

$$p_{\phi} = \frac{2xy}{(x+y)(x+y-1)}$$

Рассматриваемое условие равносильно равенству

$$\begin{aligned} \frac{x(x-1)}{(x+y)(x+y-1)} &= \frac{2xy}{3(x+y)(x+y-1)} \\ 3(x-1) &= 2y \\ y &= \frac{3x-3}{2} \end{aligned}$$

Для того, чтобы y было целым необходимо и достаточно, чтобы x было нечетным.

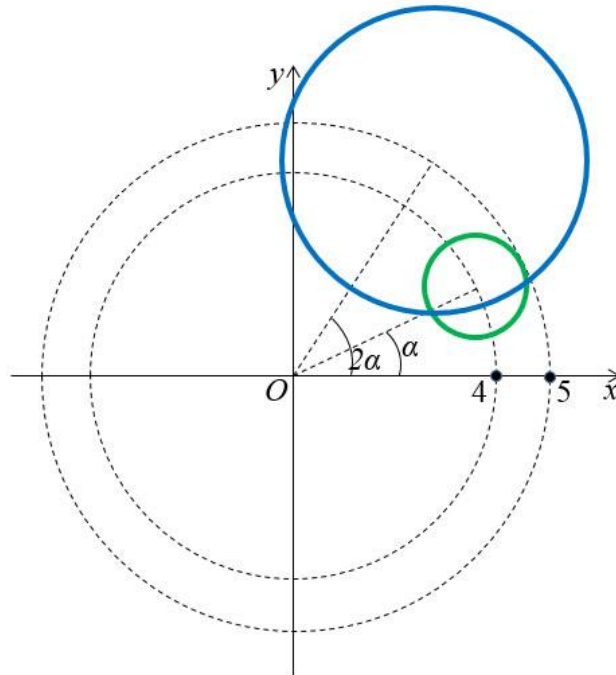
Найдем минимально возможное количество шоколадных конфет. С учетом Пети конфеты должно получить не менее 11 детей, т.е.

$$x + y \geq 22 \Leftrightarrow x + \frac{3x-3}{2} \geq 22 \Leftrightarrow 5x \geq 47$$

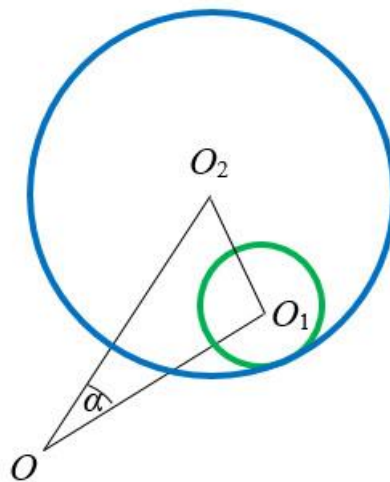
С учетом нечетности x это равносильно тому, что $x \geq 11$.

Задача 5 Ответ:
$$\begin{cases} \alpha = \pm \arccos \frac{37}{40} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \pm \arccos \frac{5}{8} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Решение. Первое уравнение системы задает окружность радиуса 1 с центром, лежащим на окружности $x^2 + y^2 = 16$ и полярным углом α . Второе уравнение задает окружность радиуса 3 с центром, лежащим на окружности $x^2 + y^2 = 25$ и полярным углом 2α .



Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда эти окружности касаются. Угол между радиус-векторами центров этих окружностей равен α . Это обстоятельство позволяет определить значение параметра α , не обращаясь к положению окружностей относительно системы координат. Рассмотрим случай внутреннего касания



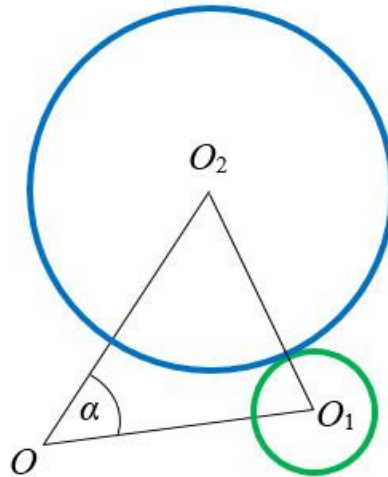
Величина $OO_1=4$, $OO_2=5$ и длина O_1O_2 равна разности радиусов окружностей, т.е. 2. Применяя к треугольнику OO_1O_2 теорему косинусов, получаем

$$4 = 16 + 25 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{16 + 25 - 4}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{37}{40}$$

$$\alpha = \pm \arccos \frac{37}{40} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Рассмотрим случай внешнего касания



Величина $OO_1=4$, $OO_2=5$ и длина O_1O_2 равна сумме радиусов окружностей, т.е. 4. Применяя к треугольнику OO_1O_2 теорему косинусов, получаем

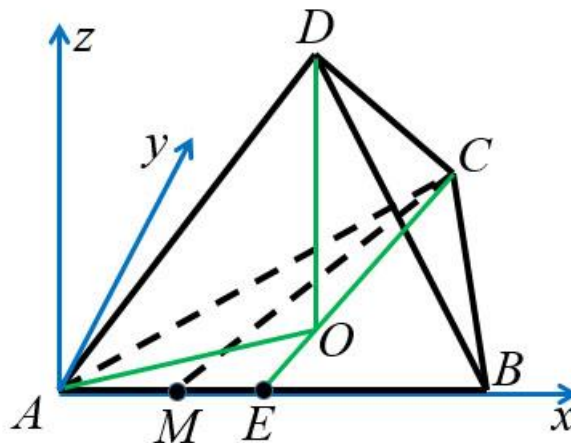
$$16 = 16 + 25 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{16 + 25 - 16}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$$

$$\alpha = \pm \arccos \frac{5}{8} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Задача 6 Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

Решение. Введем декартову систему координат с началом координат в точке A , ось абсцисс направим вдоль AB , ось ординат – на плоскости основания ABC перпендикулярно оси абсцисс и ось аппликат перпендикулярно плоскости основания тетраэдра



Пусть $AM=\lambda$, E – середина AB . Так как все ребра тетраэдра равны 1, то радиус окружности, описанной около основания

$$R = AO = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Радиус окружности, вписанной в основание

$$r = EO = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Из прямоугольного треугольника DAO находим высоту пирамиды

$$DO = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Высота равностороннего треугольника ABC со стороной 1

$$CE = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Теперь можно выписать координаты всех нужных точек

$$A(0,0,0), D\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right), M(\lambda, 0, 0), C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

Таким образом

$$\overrightarrow{AD} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right\} = \frac{1}{6} \{ 3, \sqrt{3}, 2\sqrt{6} \}$$

$$\overrightarrow{MC} = \left\{ \frac{1}{2} - \lambda, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right\} = \frac{1}{2} \{ 1 - 2\lambda, \sqrt{3}, 0 \}$$

Напишем уравнение плоскости, проходящей через ребро AD параллельно CM . Найдем вектор, перпендикулярный этой плоскости

$$\begin{aligned} \vec{N} &= 6\overrightarrow{AD} \times 2\overrightarrow{MC} = \{ 3, \sqrt{3}, 2\sqrt{6} \} \times \{ 1 - 2\lambda, \sqrt{3}, 0 \} = \\ &= \{ -6\sqrt{2}, 2\sqrt{6}(1 - 2\lambda), 2\sqrt{3}(1 + \lambda) \} = -2\sqrt{3} \{ \sqrt{6}, \sqrt{2}(2\lambda - 1), -1 - \lambda \} \end{aligned}$$

Уравнение искомой плоскости

$$\sqrt{6}x + \sqrt{2}(2\lambda - 1)y - (1 + \lambda)z = 0$$

Искомая в задаче величина равна расстоянию d от точки M до этой плоскости

$$d = \frac{|\sqrt{6} \cdot \lambda + \sqrt{2}(2\lambda - 1) \cdot 0 - (1 + \lambda) \cdot 0|}{\sqrt{6 + 2(2\lambda - 1)^2 + (1 + \lambda)^2}} = \frac{\lambda\sqrt{6}}{\sqrt{9\lambda^2 - 6\lambda + 9}} = \frac{\lambda\sqrt{2}}{\sqrt{3\lambda^2 - 2\lambda + 3}}$$

В нашем варианте величина $\lambda=1/3$ и соответственно

$$d = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Вариант 2

Задача 1 Ответ: $n=5$

Задача 2 Ответ: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Задача 3 Ответ: Например, $2021=248+251+509+1013$.

Задача 4 Ответ: не меньше 35

Задача 5 Ответ:

$$a \in \left(-\arccos \frac{3}{5} + 2\pi k; -\arccos \frac{13}{15} + 2\pi k \right) \cup \left(\arccos \frac{13}{15} + 2\pi k; \arccos \frac{3}{5} + 2\pi k \right), k \in Z$$

Задача 6 Ответ: $\frac{\sqrt{86}}{43}$

Вариант 3

Задача 1 Ответ: $n=6$

Задача 2 Ответ: $\pm 1, \pm 5$

Задача 3 Ответ: Например, $2021=121+127+251+509+1013$.

Задача 4 Ответ: не меньше 49

Задача 5 Ответ:

$$a \in \left(-\arccos \frac{27}{28} + 2\pi k; \arccos \frac{27}{28} + 2\pi k \right) \cup \left(\arccos \frac{7}{12} + 2\pi k; 2\pi - \arccos \frac{7}{12} + 2\pi k \right), k \in Z$$

Задача 6 Ответ: $\frac{2\sqrt{6}}{9}$

Вариант 4

Задача 1 Ответ: $n=9$

Задача 2 Ответ: $\pm 1, \pm 7$

Задача 3 Ответ: Например, $2021=60+61+127+251+509+1013$.

Задача 4 Ответ: не меньше 13

Задача 5 Ответ:

$$a \in \left[-\arccos \frac{7}{16} + 2\pi k; -\arccos \frac{109}{112} + 2\pi k \right] \cup \left[\arccos \frac{109}{112} + 2\pi k; \arccos \frac{7}{16} + 2\pi k \right], k \in Z$$

Задача 6 Ответ: $\frac{\sqrt{22}}{11}$

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом» 2021, математика,
11 класс.

Вариант № 1

1. Петя написал на бумаге некоторый многочлен с неотрицательными целыми коэффициентами и думал, что Вася, задав только два вопроса Пете по телефону, никогда не сможет определить все коэффициенты многочлена. На первый Васин вопрос: «Чему равно значение многочлена при $x=3$?» Петя ответил «49». На второй Васин вопрос: «Чему равно значение многочлена при $x=49$?» был получен ответ «122455». Вася, немного подумав, назвал Пете все коэффициенты многочлена, который он написал. Какой многочлен придумал Петя?

2. Решить уравнение $(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x})(\cos 2x + \sqrt{1 + \cos^2 2x}) = 1$.

3. Найти наибольшее значение выражения $F = \frac{(5n-18)\text{НОД}(n+9, n+2)}{\text{НОК}(n+9, n+2)}$ на множестве натуральных чисел.

При каком n оно достигается?

4. Петя совершенно случайно написал на бумаге два телефонных номера. Какова вероятность того, что суммы последних двух цифр этих номеров отличаются на 6 единиц?

5. Доказать, что уравнение $x^3 - 6x = a^3 + \frac{8}{a^3}$ не может иметь трех действительных решений ни при каких a .

При каких a уравнение имеет два различных решения? Найти эти решения.

6. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды наклонено к плоскости ее основания под углом 45° . В пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании пирамиды, а другие четыре – на ее боковых гранях. Найти отношение объемов куба и пирамиды.

Вариант № 2

1. Петя написал на бумаге некоторый многочлен с неотрицательными целыми коэффициентами и думал, что Вася, задав только два вопроса Пете по телефону, никогда не сможет определить все коэффициенты многочлена. На первый Васин вопрос: «Чему равно значение многочлена при $x=2$?» Петя ответил «20». На второй Васин вопрос: «Чему равно значение многочлена при $x=20$?» был получен ответ «160004». Вася, немного подумав, назвал Пете все коэффициенты многочлена, который он написал. Какой многочлен придумал Петя?

2. Решить уравнение $\sin 3x + \sqrt{1 + \sin^2 3x} = \sqrt{1 + \cos^2 x} - \cos x$.

3. Найти наибольшее значение выражения $F = \frac{(7n-38)\text{НОД}(n+6, n+1)}{\text{НОК}(n+6, n+1)}$ на множестве натуральных чисел.

При каком n оно достигается?

4. Петя совершенно случайно написал на бумаге два телефонных номера. Какова вероятность того, что суммы последних двух цифр этих номеров отличаются на 5 единиц?

5. Доказать, что уравнение $x^3 + 3x = a^3 - \frac{1}{a^3}$ имеет только одно действительное решение при любых допустимых a . Найти это решение.

6. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды наклонено к плоскости ее основания под углом 60° . В пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании пирамиды, а другие четыре – на ее боковых гранях. Найти отношение объемов куба и пирамиды.

Вариант № 3

1. Петя написал на бумаге некоторый многочлен с неотрицательными целыми коэффициентами и думал, что Вася, задав только два вопроса Пете по телефону, никогда не сможет определить все коэффициенты многочлена. На первый Васин вопрос: «Чему равно значение многочлена при $x=4$?» Петя ответил «78». На второй Васин вопрос: «Чему равно значение многочлена при $x = 78$?» был получен ответ «474714». Вася, немного подумав, назвал Пете все коэффициенты многочлена, который он написал. Какой многочлен придумал Петя?

2. Решить уравнение $(\cos 2x + \sqrt{1 + \cos^2 2x})(\sin 3x + \sqrt{1 + \sin^2 3x}) = 1$.

3. Найти наибольшее значение выражения $F = \frac{(9n - 167) \text{НОД}(n + 12, n + 1)}{\text{НОК}(n + 12, n + 1)}$ на множестве натуральных чисел. При каком n оно достигается?

4. Петя совершенно случайно написал на бумаге два телефонных номера. Какова вероятность того, что суммы последних двух цифр этих номеров отличаются на 4 единицы?

5. Доказать, что уравнение $x^3 - 9x = a^3 + \frac{27}{a^3}$ не может иметь трех действительных решений ни при каких a . При каких a уравнение имеет единственное решение? Найти это решение.

6. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды наклонено к плоскости ее основания под углом 30° . В пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании пирамиды, а другие четыре – на ее боковых гранях. Найти отношение объемов куба и пирамиды.

Вариант № 4

1. Петя написал на бумаге некоторый многочлен с неотрицательными целыми коэффициентами и думал, что Вася, задав только два вопроса Пете по телефону никогда не сможет определить все коэффициенты многочлена. На первый Васин вопрос: «Чему равно значение многочлена при $x = 1$?» Петя ответил «4». На второй Васин вопрос: «Чему равно значение многочлена при $x = 4$?» был получен ответ «97». Вася, немного подумав, назвал Пете все коэффициенты многочлена, который он написал. Какой многочлен придумал Петя?

2. Решить уравнение $\sin 3x + \sqrt{1 + \sin^2 3x} = \sqrt{1 + \sin^2 2x} - \sin 2x$.

3. Найти наибольшее значение выражения $F = \frac{(11n - 53) \text{НОД}(n + 5, n + 2)}{\text{НОК}(n + 5, n + 2)}$ на множестве натуральных чисел. При каком n оно достигается?

4. Петя совершенно случайно написал на бумаге два телефонных номера. Какова вероятность того, что суммы последних двух цифр этих номеров отличаются на 3 единицы?

5. Доказать, что уравнение $x^3 + 12x = a^3 - \frac{64}{a^3}$ имеет только одно действительное решение при любых допустимых a . Найти это решение.

6. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды наклонено к плоскости ее основания под углом 75° . В пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании пирамиды, а другие четыре – на ее боковых гранях. Найти отношение объемов куба и пирамиды.

Решения и ответы

Вариант 1

Задача 1 Ответ: $P(x) = x^3 + 2x^2 + 4$

Решение. Пусть искомым многочлен имеет вид

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Так как все коэффициенты многочлена – неотрицательные целые числа, то при $n \geq 4$

$$P(3) \geq a_n 3^n \geq 3^4 = 81 > 49$$

и первое условие задачи не может быть выполнено. Следовательно

$$P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Далее, если старший коэффициент больше 1, то

$$P(49) \geq 2 \cdot 49^3 = 235298 > 122455$$

и не выполнено второе условие задачи. Таким образом, либо $a_3=0$, либо $a_3=1$. Покажем, что первый вариант не подходит. Действительно, в этом случае

$$P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

и мы имеем два условия

$$\begin{cases} 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 49 \\ 2401a_2 + 49a_1 + a_0 = 122455 \end{cases}$$

Из первого уравнения теперь получаем оценки

$$9a_2 \leq 49 \Rightarrow a_2 \leq 5$$

$$3a_1 \leq 49 \Rightarrow a_1 \leq 16$$

$$a_0 \leq 49$$

Но тогда

$$2401a_2 + 49a_1 + a_0 \leq 2401 \cdot 5 + 49 \cdot 16 + 49 = 12838 < 122455$$

и не выполнено второе условие. Таким образом, мы доказали, что наш многочлен может иметь только следующий вид

$$P(x) = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

и мы получаем следующие условия задачи

$$\begin{cases} 27 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 49 \\ 117649 + 2401a_2 + 49a_1 + a_0 = 122455 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 22 \\ 2401a_2 + 49a_1 + a_0 = 4806 \end{cases}$$

Из первого равенства следует, что

$$9a_2 \leq 22 \Rightarrow a_2 \leq 2$$

и далее проверяем три возможных значения. При $a_2=0$ имеем систему

$$\begin{cases} 3a_1 + a_0 = 22 \\ 49a_1 + a_0 = 4806 \end{cases}$$

Решая ее, находим $a_1=104$, $a_0=-290$. Этот случай нам не подходит. При $a_2=1$ имеем систему

$$\begin{cases} 3a_1 + a_0 = 13 \\ 49a_1 + a_0 = 2405 \end{cases}$$

Решая ее, находим $a_1=52$, $a_0=-143$. Этот случай нам также не подходит. При $a_2=2$ имеем систему

$$\begin{cases} 3a_1 + a_0 = 4 \\ 49a_1 + a_0 = 4 \end{cases}$$

Эта система имеет решение $a_1=0$, $a_0=4$. Это единственный приемлемый вариант и в этом случае

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + 4$$

Проверка

$$P(3) = 27 + 18 + 4 = 49$$

$$P(49) = 117649 + 4802 + 4 = 122455$$

Показывает, что условия задачи выполнены.

Задача 2 Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in Z$

Решение. Так как

$$\left(\cos 2x + \sqrt{1 + \cos^2 2x} \right) \left(\sqrt{1 + \cos^2 2x} - \cos 2x \right) = 1$$

то величина

$$\sqrt{1 + \cos^2 2x} - \cos 2x \neq 0$$

и умножая на нее исходное уравнение, получим равносильное

$$\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x} = \sqrt{1 + \cos^2 2x} - \cos 2x \quad (1)$$

Переносим вторые слагаемые в правой и левой частях уравнения в другую сторону, получаем равносильное уравнение

$$\sin x + \cos 2x = \sqrt{1 + \cos^2 2x} - \sqrt{1 + \sin^2 x}$$

После возведения в квадрат имеем

$$\begin{aligned} & \sin^2 x + 2 \sin x \cos 2x + \cos^2 2x = \\ & = 1 + \sin^2 x - 2\sqrt{(1 + \cos^2 2x)(1 + \sin^2 x)} + 1 + \cos^2 2x \\ & 1 - \sin x \cos 2x = \sqrt{(1 + \cos^2 2x)(1 + \sin^2 x)} \end{aligned}$$

Снова возводя в квадрат, получаем

$$\begin{aligned} & 1 - 2 \sin x \cos 2x + \sin^2 x \cos^2 2x = \\ & = 1 + \sin^2 x + \cos^2 2x + \sin^2 x \cos^2 2x \\ & \sin^2 x + 2 \sin x \cos 2x + \cos^2 2x = 0 \\ & (\sin x + \cos 2x)^2 = 0 \\ & \sin x + \cos 2x = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Обратно, подставляя в исходное уравнение

$$\cos 2x = -\sin x$$

и используя формулу разности квадратов, получим

$$\begin{aligned} & (\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x})(\cos 2x + \sqrt{1 + \cos^2 2x}) = \\ & = (\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x})(-\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 2x}) = 1 \end{aligned}$$

Это означает, что уравнения (1) и (2) равносильны. Решая уравнение (2), получаем

$$\sin x + \cos 2x = 0, \quad \sin x + 1 - 2\sin^2 x = 0, \quad 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Эти три серии можно записать одной

$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Задача 3 Ответ: Максимальное значение равно 7 и достигается при $n=12$.

Решение. Известно, что $\text{НОД}(a,b)\text{НОК}(a,b)=ab$, поэтому заменяя в $F(n)$

$$\text{НОК}(n+9, n+2) = \frac{(n+9)(n+2)}{\text{НОД}(n+9, n+2)}$$

получим, что

$$F(n) = \frac{(5n-18)\text{НОД}^2(n+9, n+2)}{(n+9)(n+2)}$$

Если d – общий делитель $n+9$ и $n+2$, то разность $(n+9) - (n+2)=7$ также делится на d . Следовательно, единственные общие делители $n+9$ и $n+2$ это только 1 или 7. Поэтому при каждом n рассматриваемая функция

$$F(n) = \frac{(5n-18)}{(n+9)(n+2)}$$

или

$$F(n) = \frac{49(5n-18)}{(n+9)(n+2)}$$

Рассмотрим на полуоси $x \geq 1$ вспомогательную функцию вещественной переменной

$$f(x) = \frac{(5x-18)}{(x+9)(x+2)}$$

и найдем ее наибольшее значение. Дифференцируя, имеем

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{5(x^2 + 11x + 18) - (5x-18)(2x+11)}{(x+9)^2(x+2)^2} = \\ &= -\frac{5x^2 - 36x + 288}{(x+9)^2(x+2)^2} = -\frac{(x-12)(5x+24)}{(x+9)^2(x+2)^2} \end{aligned}$$

Эта производная при $x \geq 1$ меняет свой знак только один раз в точке $x=12$, причем с плюса на минус. Отсюда следует, что функция $F(x)$ в точке $x=12$ достигает своего наибольшего значения. Это значение равно

$$f(12) = \frac{(5 \cdot 12 - 18)}{(12+9)(12+2)} = \frac{1}{7}$$

При $n=12$ оба числа $n+9=21$ и $n+2=14$ делятся на 7, следовательно

$$F(12) = 49 f(12) = 7$$

а во всех остальных точках

$$F(n) \leq \frac{49(5n-18)}{(n+9)(n+2)} = 49 f(n) \leq 7$$

Это доказывает, что $F(n)$ достигает своего наибольшего значения, равного 7, при $n=12$.

Задача 4 Ответ 0,083

Решение. Зафиксируем один из номеров. Рассмотрим различные варианты в зависимости от суммы k последних двух цифр номера. Число номеров, у которых она заключена от 0 до 9 равно $k+1$ (0 k , 1 $k-1$, 2 $k-2$, 3 $k-3$, ..., k 0), а число номеров, у которых она больше 9, равна $19-k$ (9 $k-9$, 8 $k-8$, 7 $k-7$, ..., $k-9$ 9). Число номеров, у которых сумма $k+6$ заключена до 9 равно $(k+6)+1=k+7$, но $0 \leq k \leq 3$. Число номеров, у которых сумма $k+6$ больше 9 также равна $19-(k+6)=13-k$, но $4 \leq k \leq 12$. Общее количество номеров равно

$$1 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 8 + 7 \cdot 7 + \\ + 8 \cdot 6 + 9 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + 9 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 7 \cdot 1 = 415$$

Для второго записанного номера столько же вариантов. Таким образом, благоприятных случаев 830. Всего возможных вариантов 100 для одного номера и 100 для другого, всего $100 \times 100 = 10000$.

Искомая вероятность

$$p = \frac{830}{10000} = 0,083$$

Задача 5 Ответ:
$$\begin{cases} a = -\sqrt{2} \Rightarrow x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -2\sqrt{2} \\ a = \sqrt{2} \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

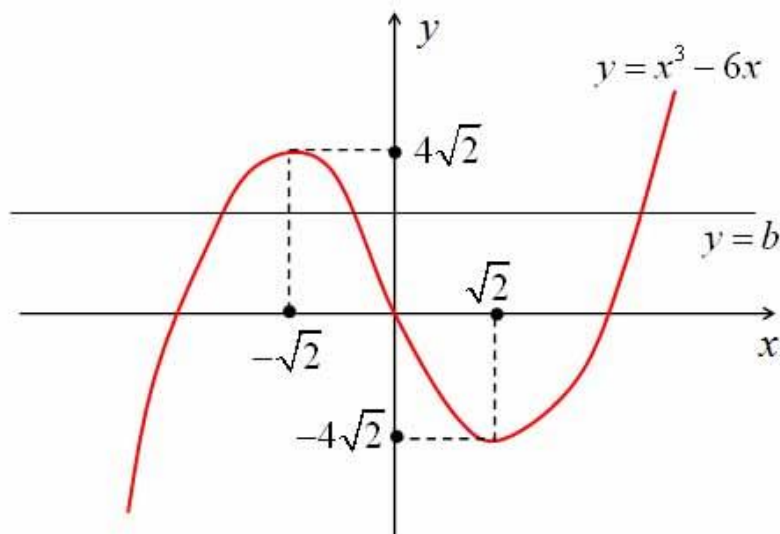
Решение. Построим график левой части $y=x^3-6x$. Производная

$$y' = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2) = 3(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$$

Знаки производной



В точке $x = -\sqrt{2}$ функция имеет максимум, равный $4\sqrt{2}$, а в точке $x = \sqrt{2}$ минимум, равный $-4\sqrt{2}$.



Из этого следует, что уравнение

$$x^3 - 6x = b$$

имеет три решения тогда и только тогда, когда

$$-4\sqrt{2} < b < 4\sqrt{2}$$

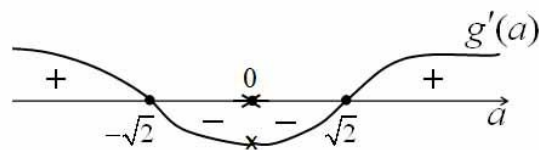
Найдем область значений функции

$$g(a) = a^3 + \frac{8}{a^3}$$

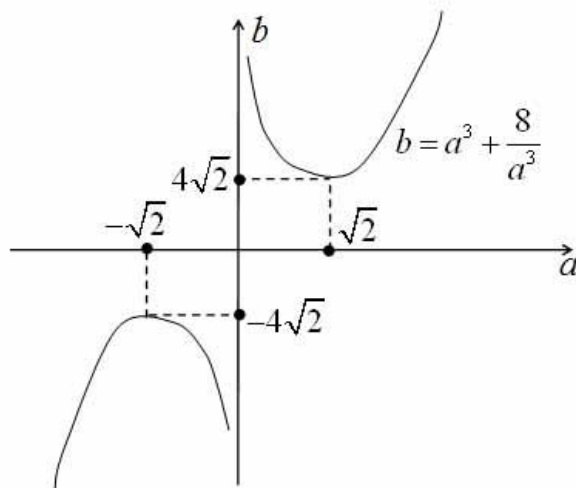
Производная

$$g'(a) = 3a^2 - \frac{24}{a^4} = \frac{3(a^6 - 8)}{a^4}$$

Знаки производной



В точке $a = -\sqrt{2}$ функция имеет максимум, равный $-4\sqrt{2}$, а в точке $a = \sqrt{2}$ минимум, равный $4\sqrt{2}$.



Отсюда следует, что область значений этой функции не содержит интервал

$$-4\sqrt{2} < b < 4\sqrt{2}$$

и рассматриваемое уравнение не может иметь трех различных корней. Два корня мы можем получить только в двух случаях

$$b = -4\sqrt{2} \quad (a = -\sqrt{2}), \quad b = 4\sqrt{2} \quad (a = \sqrt{2}).$$

Для первого значения один из корней известен ($x = \sqrt{2}$), а второй находим, решая уравнение

$$x^3 - 6x = -4\sqrt{2}, \quad x^3 - 6x + 4\sqrt{2} = 0$$

$$(x - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}x - 4) = 0$$

$$(x - \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + 2\sqrt{2}) = 0$$

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = -2\sqrt{2}$$

Для второго значения один из корней также известен ($x = -\sqrt{2}$), а второй находим, решая уравнение

$$x^3 - 6x = 4\sqrt{2}, \quad x^3 - 6x - 4\sqrt{2} = 0$$

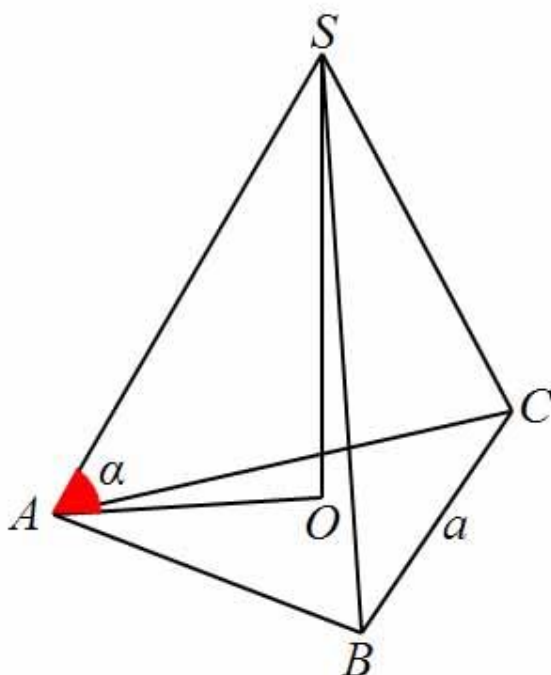
$$(x + \sqrt{2})(x^2 - \sqrt{2}x - 4) = 0$$

$$(x + \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 2\sqrt{2}) = 0$$

$$x_1 = -\sqrt{2}, \quad x_2 = 2\sqrt{2}$$

Задача 6 Ответ: $\frac{36\sqrt{3}}{(5 + \sqrt{3})^3}$

Решение. Рассмотрим чертеж



Пусть a – сторона основания, α – угол наклона бокового ребра, H – высота пирамиды, $R=AO$ – радиус окружности, описанной около основания. В правильном треугольнике со стороной a радиус описанной окружности

$$AO = R = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Из прямоугольного треугольника SAO находим высоту пирамиды

$$H = AO \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{a \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{3}}$$

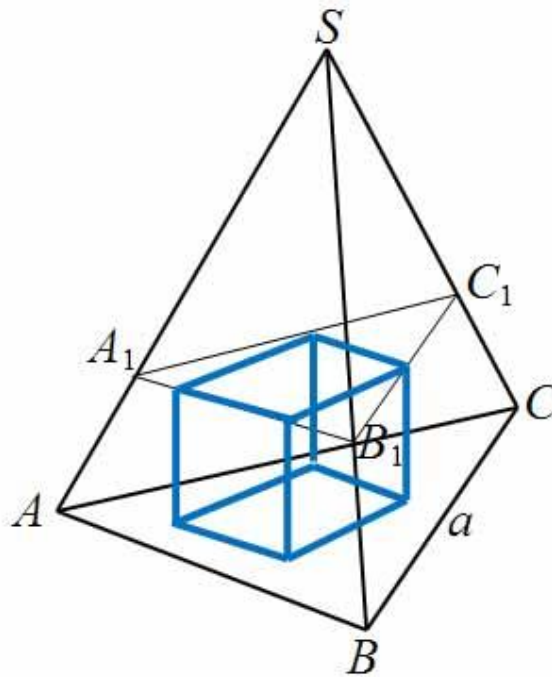
Площадь основания пирамиды

$$S = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

Объем пирамиды

$$V_n = \frac{1}{3} S \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{3}} = \frac{a^3 \operatorname{tg} \alpha}{12}$$

Пусть b – ребро вписанного куба и $A_1B_1C_1$ – сечение пирамиды плоскостью верхней грани куба.



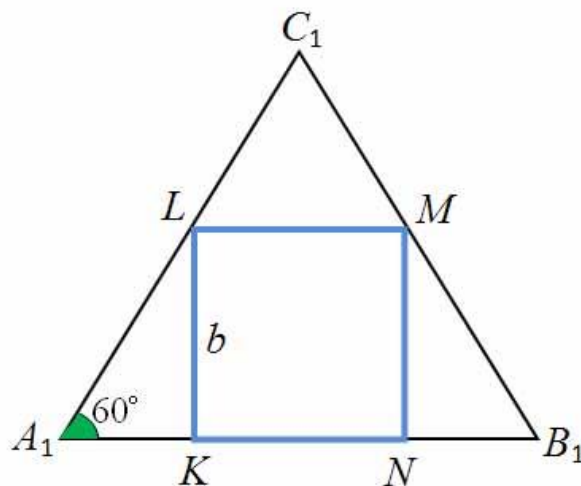
Обозначим через a_1 сторону треугольника этого сечения $a_1 = A_1B_1$. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны с коэффициентом подобия

$$k = \frac{H-b}{H} = \frac{\frac{a \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{3}} - b}{\frac{a \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{3}}} = \frac{a \operatorname{tg} \alpha - b\sqrt{3}}{a \operatorname{tg} \alpha}$$

и поэтому

$$a_1 = ka = \frac{a \operatorname{tg} \alpha - b\sqrt{3}}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Рассмотрим треугольник $A_1B_1C_1$ со вписанной гранью куба



Сторона

$$a_1 = A_1K + KN + NB_1 = \frac{b}{\operatorname{tg} 60^\circ} + b + \frac{b}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{b}{\sqrt{3}} + b + \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} b$$

Приравнявая два выражения для a_1 , находим b

$$\frac{a \operatorname{tg} \alpha - b\sqrt{3}}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} b$$

$$a - \frac{b\sqrt{3}}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} b, \quad a = \frac{b\sqrt{3}}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} b, \quad a = \frac{(2 + \sqrt{3}) \operatorname{tg} \alpha + 3}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha} b$$

$$b = \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{(2 + \sqrt{3}) \operatorname{tg} \alpha + 3} a$$

Так как объем куба $V_k = b^3$, то искомое отношение объемов

$$\frac{V_k}{V_n} = \left(\frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{(2 + \sqrt{3}) \operatorname{tg} \alpha + 3} a \right)^3 : \left(\frac{a^3 \operatorname{tg} \alpha}{12} \right) = \frac{36\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 \alpha}{((2 + \sqrt{3}) \operatorname{tg} \alpha + 3)^3}$$

В нашем варианте угол $\alpha = 45^\circ$, $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ и поэтому

$$\frac{V_k}{V_n} = \frac{36\sqrt{3}}{(5 + \sqrt{3})^3}$$

Вариант 2

Задача 1 Ответ: $P(x) = x^4 + 4$

Задача 2 Ответ:
$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Задача 3 Ответ: Максимальное значение равно 5 и достигается при $n=14$.

Задача 4 Ответ: 0,096

Задача 5 Ответ: $x = a - \frac{1}{a}$

Задача 6 Ответ:
$$\frac{9}{2(1 + \sqrt{3})^3}$$

Вариант 3

Задача 1 Ответ: $P(x) = x^3 + 2x + 6$

Задача 2 Ответ:
$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Задача 3 Ответ: Максимальное значение равно 11 и достигается при $n=43$.

Задача 4 Ответ: 0,108

Задача 5 Ответ: $x = a + \frac{3}{a} \quad (a \neq \pm\sqrt{3})$

Задача 6 Ответ:
$$\frac{27}{2(1 + 2\sqrt{3})^3}$$

Вариант 4

Задача 1 Ответ: $P(x) = x^3 + 2x^2 + 1$

Задача 2 Ответ:
$$\begin{cases} x = \pi + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi k}{5}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Задача 3 Ответ: Максимальное значение равно 3 и достигается при $n=13$.

Задача 4 Ответ: 0,1184

Задача 5 Ответ: $x = a - \frac{4}{a} \quad (a \neq 0)$

Задача 6 Ответ:
$$\frac{9(12 + 7\sqrt{3})}{2(5 + 2\sqrt{3})^3}$$

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом» 2021, математика,
11 класс.

Вариант № 1

1. Скорость движения тела на прямой изменяется по закону $v(t) = A|\sin(\alpha t)|$, $t \geq 0$ с некоторыми константами $A > 0$ и $0 < \alpha < 0,2$. Известно, что за каждые 20 сек точка проходит путь 2м. Какой путь пройдет тело спустя 65 сек после начала движения?
2. Доказать, что число $x_1 = -\sin \frac{\pi}{18}$ является корнем кубического уравнения $8x^3 - 6x - 1 = 0$. Найти два других его корня.
3. При каких целых числах b и c выражение $\sqrt{4x^2 + bx + c}$ целое при любых целых x ?
4. В колоде 10 карт, на каждой из них нарисовано одно из чисел от 1 до 10. Случайно выбранную из колоды карту кладут на стол, показывают всем написанное на ней число и возвращают ее в колоду. После этого колода тщательно перемешивается и готова к продолжению игры. Петя выкладывал на стол карту три раза. Какова вероятность того, что сумма выпавших чисел оказалась равной 5?
5. Множество вертикальных и горизонтальных параллельных прямых разбивают плоскость на бесконечное число равных прямоугольников со сторонами 1 и $\sqrt{3}$. Пусть A – одна точек пересечения прямых. Рассмотрим множество всех равнобедренных треугольников с вершиной в точке A и двумя другими вершинами, расположенными в точках пересечения прямых. Какое минимальное значение может принимать площадь таких треугольников? Сколько треугольников из этого множества имеет площадь $39\sqrt{3}$?
6. Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Длины сторон AB и AD равны. На стороне CD расположена точка Q так, что $DQ = 1$, а на стороне BC – точка P так, что $BP = 2$. При этом $\angle DAB = 2\angle QAP$. Найти длину отрезка PQ .

Вариант № 2

1. Скорость движения тела на прямой изменяется по закону $v(t) = A|\sin(\alpha t)|$, $t \geq 0$ с некоторыми константами $A > 0$ и $0 < \alpha < 0,15$. Известно, что за каждые 30 сек точка проходит путь 6м. Какой путь пройдет тело спустя 50 сек после начала движения?
2. Доказать, что число $x_1 = 2 \cos \frac{\pi}{18}$ является корнем кубического уравнения $x^3 - 3x - \sqrt{3} = 0$.
Найти два других его корня.
3. При каких целых числах a и c выражение $\sqrt{ax^2 + 8x + c}$ целое при любых целых x ?
4. В колоде 12 карт, на каждой из них нарисовано одно из чисел от 1 до 12. Случайно выбранную из колоды карту кладут на стол, показывают всем написанное на ней число и возвращают ее в колоду. После этого колода тщательно перемешивается и готова к продолжению игры. Петя выкладывал на стол карту четыре раза. Какова вероятность того, что сумма выпавших чисел оказалась большей 6?

5. Множество вертикальных и горизонтальных параллельных прямых разбивают плоскость на бесконечное число равных прямоугольников со сторонами 2 и $3\sqrt{3}$. Пусть A – одна точек пересечения прямых. Рассмотрим множество всех равносторонних треугольников с вершиной в точке A и двумя другими вершинами, расположенными в точках пересечения прямых. Какое минимальное значение может принимать площадь таких треугольников? Сколько треугольников из этого множества имеет площадь $108\sqrt{3}$?

6. Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Длины сторон AB и AD равны. На стороне CD расположена точка Q так, что $DQ = 2$, а на стороне BC – точка P так, что $BP = 3$. При этом $\angle DAB = 2\angle QAP$. Найти длину отрезка PQ .

Вариант № 3

1. Скорость движения тела на прямой изменяется по закону $v(t) = A|\sin(\alpha t)|$, $t \geq 0$ с некоторыми константами $A > 0$ и $0 < \alpha < 0,3$. Известно, что за каждые 15 сек точка проходит путь 5м. Какой путь пройдет тело спустя 95 сек после начала движения?

2. Доказать, что число $x_1 = -tg \frac{2\pi}{9}$ является корнем кубического уравнения $x^3 - 3\sqrt{3}x^2 - 3x + \sqrt{3} = 0$. Найти два других его корня.

3. При каких целых числах a и b выражение $\sqrt{ax^2 + bx + 16}$ целое при любых целых x ?

4. В колоде 6 карт, на каждой из них нарисовано одно из чисел от 1 до 6. Случайно выбранную из колоды карту кладут на стол, показывают всем написанное на ней число и возвращают ее в колоду. После этого колода тщательно перемешивается и готова к продолжению игры. Петя выкладывал на стол карту два раза. Какова вероятность того, что сумма выпавших чисел оказалась равной 8?

5. Множество вертикальных и горизонтальных параллельных прямых разбивают плоскость на бесконечное число равных прямоугольников со сторонами 3 и $2\sqrt{3}$. Пусть A – одна точек пересечения прямых. Рассмотрим множество всех равносторонних треугольников с вершиной в точке A и двумя другими вершинами, расположенными в точках пересечения прямых. Какое минимальное значение может принимать площадь таких треугольников? Сколько треугольников из этого множества имеет площадь $48\sqrt{3}$?

6. Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Длины сторон AB и AD равны. На стороне CD расположена точка Q так, что $DQ = 3$, а на стороне BC – точка P так, что $BP = 4$. При этом $\angle DAB = 2\angle QAP$. Найти длину отрезка PQ .

Вариант № 4

1. Скорость движения тела на прямой изменяется по закону $v(t) = A|\sin(\alpha t)|$, $t \geq 0$ с некоторыми константами $A > 0$ и $0 < \alpha < 0,1$. Известно, что за каждые 40 сек точка проходит путь 4 м. Какой путь пройдет тело спустя 100 сек после начала движения?

2. Доказать, что число $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}tg \frac{5\pi}{18}$ является корнем кубического уравнения $9x^3 - 9x^2 - 9x + 1 = 0$. Найти два других его корня.

3. При каких целых числах b и c выражение $\sqrt{16x^2 + bx + c}$ целое при любых целых x ?

4. В колоде 9 карт, на каждой из них нарисовано одно из чисел от 1 до 9. Случайно выбранную из колоды карту кладут на стол, показывают всем написанное на ней число и возвращают ее в колоду. После этого колода тщательно перемешивается и готова к продолжению игры. Петя выкладывал на стол карту пять раз. Какова вероятность того, что сумма выпавших чисел оказалась меньше 9?

5. Множество вертикальных и горизонтальных параллельных прямых разбивают плоскость на бесконечное число равных прямоугольников со сторонами 4 и $\sqrt{3}$. Пусть A – одна точек пересечения прямых. Рассмотрим множество всех равносторонних треугольников с вершиной в точке A и двумя другими вершинами, расположенными в точках пересечения прямых. Какое минимальное значение может принимать площадь таких треугольников? Сколько треугольников из этого множества имеет площадь $412\sqrt{3}$?

6. Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Длины сторон AB и AD равны. На стороне CD расположена точка Q так, что $DQ = 1$, а на стороне BC – точка P так, что $BP = 5$. При этом $\angle DAB = 2\angle QAP$. Найти длину отрезка PQ .

Решения и ответы

Вариант 1

Задача 1 Ответ: $7 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

Решение. По условию задачи, пройденный за любые 20 секунд путь

$$\int_0^{t+20} v(s)ds - \int_0^t v(s)ds = 2 \rightarrow$$

Дифференцируя это равенство, получаем, что

$$v(t+20) - v(t) = 0$$

т.е. функция $v(t)$ имеет 20 своим периодом. Но так как

$$v(t) = A|\sin(\alpha t)|$$

то ее наименьший положительный период равен π/α , следовательно

$$20 = \frac{\pi}{\alpha} k \quad (k \in \mathbb{N})$$

Отсюда находим

$$\alpha = \frac{\pi}{20} k$$

и так как $\alpha < 0,2$, то $k=1$. Таким образом

$$v(t) = A \left| \sin \left(\frac{\pi t}{20} \right) \right|$$

За первые 20 секунд пройденный также составил 2 м. Это дает возможность определить и постоянную A .

$$2 = \int_0^{20} v(t)dt = A \int_0^{20} \left| \sin \left(\frac{\pi t}{20} \right) \right| dt = A \int_0^{20} \sin \left(\frac{\pi t}{20} \right) dt = -\frac{20A}{\pi} \cos \left(\frac{\pi t}{20} \right) \Big|_0^{20} = \frac{40A}{\pi}$$

Из последнего равенства находим, что

$$A = \frac{\pi}{20}$$

Так как за каждые 20 секунд тело проходит 2 м, то за первые 60 секунд оно пройдет 6 м и за оставшиеся 5 секунд до конца расчетного времени оно пройдет еще

$$\int_{60}^{65} \frac{\pi}{20} \left| \sin \left(\frac{\pi t}{20} \right) \right| dt = - \int_{60}^{65} \frac{\pi}{20} \sin \left(\frac{\pi t}{20} \right) dt = \cos \left(\frac{\pi t}{20} \right) \Big|_{60}^{65} = -\cos \frac{\pi}{4} - \cos \pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

Искомый путь равен

$$6 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 7 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Задача 2 Ответ: $-\sin \frac{5\pi}{18}, \sin \frac{7\pi}{18}$

Решение. Рассмотрим уравнение

$$\sin 3\varphi = -\frac{1}{2}$$

Раскрывая синус тройного угла, приведем его к виду

$$3\sin \varphi - 4\sin^3 \varphi = -\frac{1}{2}$$

$$8\sin^3 \varphi - 6\sin \varphi - 1 = 0$$

т.е. для всех решений исходного уравнения величина

$$x = \sin \varphi$$

является решением кубического уравнения

$$8x^3 - 6x - 1 = 0$$

Так как величина

$$\varphi = -\frac{\pi}{18}$$

удовлетворяет равенству

$$\sin 3\varphi = -\frac{1}{2}$$

то

$$x = -\sin \frac{\pi}{18}$$

является одним из решений уравнения

$$8x^3 - 6x - 1 = 0$$

Остальные решения можно получить из исходного тригонометрического уравнения

$$\sin 3\varphi = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} 3\varphi = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ 3\varphi = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = -\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3} \\ \varphi = \frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} \end{cases}$$

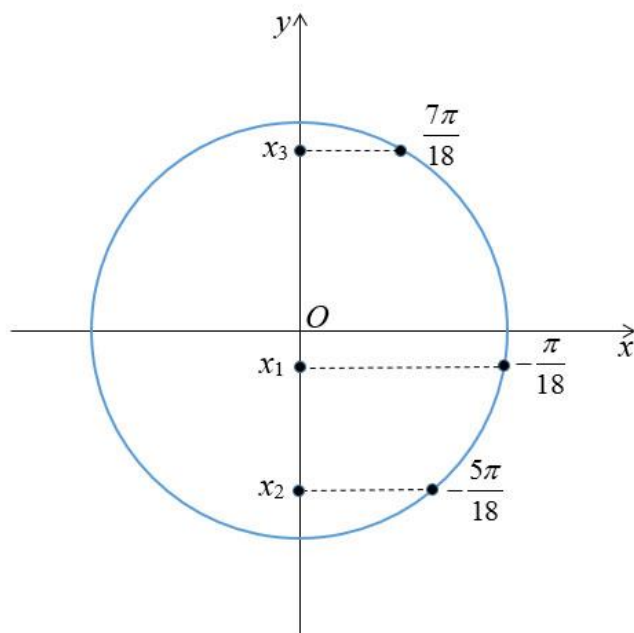
Среди этих решений нетрудно подобрать пару значений, для которых получаются другие значения для $x = \sin \varphi$. Помимо

$$x_1 = -\sin \frac{\pi}{18} \quad (k = 0)$$

МОЖНО ВЗЯТЬ

$$x_2 = -\sin \frac{5\pi}{18} \quad (n = -1)$$

$$x_3 = \sin \frac{7\pi}{18} \quad (n = 0) \quad -$$



Задача 3 Ответ: $b = 4k$, $c = k^2$, $k \in \mathbb{Z}$

Решение. Используя формулу разности квадратов, получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2 + bx + c} - 2x - \frac{b}{4} &= \frac{4x^2 + bx + c - \left(2x - \frac{b}{4}\right)^2}{\sqrt{4x^2 + bx + c} + 2x + \frac{b}{4}} = \frac{c - \frac{b^2}{16}}{\sqrt{4x^2 + bx + c} + 2x + \frac{b}{4}} \\ 4\sqrt{4x^2 + bx + c} - 8x - b &= \frac{4c - \frac{b^2}{4}}{\sqrt{4x^2 + bx + c} + 2x + \frac{b}{4}} \end{aligned}$$

В последнем равенстве слева при всех натуральных x стоит целое число, а правая часть при достаточно большом x будет по модулю меньше 1. Это может быть только если правая часть равна нулю, т.е.

$$c = \frac{b^2}{16}$$

С учетом полученного равенства перепишем исходное тождество в следующем виде

$$\sqrt{4x^2 + bx + c} - 2x = \frac{b}{4}$$

Слева при всех целых x стоит целое число, следовательно, правая часть также является целым числом, т.е.

$$b = 4k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Таким образом

$$b = 4k, c = \frac{b^2}{16} = k^2, k \in Z$$

Обратно, если выполнены последние соотношения, то

$$\sqrt{4x^2 + bx + c} = \sqrt{4x^2 + 4k + k^2} = \sqrt{(2x + k)^2} = |2x + k| \in Z$$

Задача 4 Ответ 0,006.

Решение. Всего имеем $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$. Число благоприятных вариантов равно 6

$$1 + 1 + 3$$

$$1 + 3 + 1$$

$$3 + 1 + 1$$

$$1 + 2 + 2$$

$$2 + 1 + 2$$

$$2 + 2 + 1$$

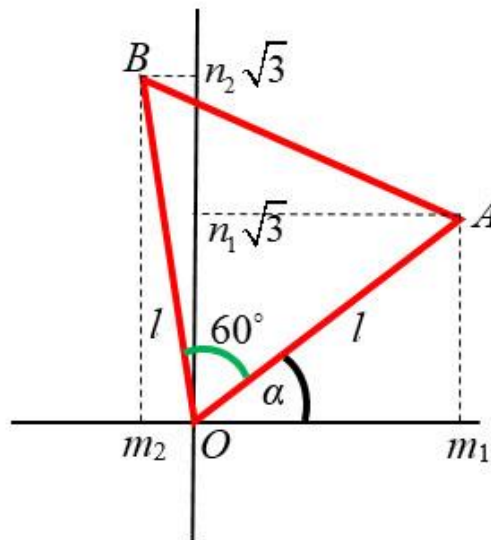
Искомая вероятность

$$p = \frac{6}{1000} = 0,006$$

Задача 5 Ответ: минимально возможная площадь равна $\sqrt{3}$, число треугольников с площадью $39\sqrt{3}$ равно 12.

Решение. Выберем любую вершину прямоугольников и поместим в ней начало O декартовой системы координат с осями, параллельными сети прямых. Без ограничения общности, можно поместить вершину равностороннего треугольника в точку O . Тогда координаты двух других вершин

$$A(m_1; n_1\sqrt{3}), B(m_2; n_2\sqrt{3}), m_1, m_2, n_1, n_2 \in Z. \text{ Длины векторов } |OA| = |OB| = l$$



Соотношения между координатами векторов OA и OB :

$$m_1 = l \cos \alpha, \quad n_1\sqrt{3} = l \sin \alpha,$$

$$m_2 = l \cos(\alpha + 60^\circ) = l \left(\cos \alpha \cdot \frac{1}{2} - \sin \alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2}(m_1 - 3n_1),$$

$$n_2\sqrt{3} = l \sin(\alpha + 60^\circ) = l \left(\sin \alpha \cdot \frac{1}{2} + \cos \alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2}(n_1\sqrt{3} + m_1\sqrt{3}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_2 = \frac{1}{2}(m_1 + n_1)$$

Для описания всех равносторонних треугольников удобно взять за параметры

$$n_1 = s, m_2 = t$$

Тогда

$$m_1 = 2m_2 + 3n_1 = 2t + 3s$$

$$n_2 = \frac{1}{2}(m_1 + n_1) = \frac{1}{2}(2t + 3s + s) = t + 2s$$

И вершины A и B всех равносторонних треугольников задаются равенствами

$$A(2t + 3s; s\sqrt{3}), B(t; (t + 2s)\sqrt{3}) \quad (s, t \in \mathbb{Z})$$

Длина стороны треугольников

$$l = OA = \sqrt{(2t + 3s)^2 + (s\sqrt{3})^2} = \sqrt{4t^2 + 12ts + 12s^2} = 2\sqrt{t^2 + 3ts + 3s^2}$$

Их площадь

$$S(t, s) = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} ((2t + 3s)^2 + 3s^2) = \sqrt{3}(t^2 + 3ts + 3s^2)$$

Покажем, что наименьшее значение $S(t, s)$ равно $\sqrt{3}$. Удобнее рассмотреть функцию

$$f(t, s) = t^2 + 3ts + 3s^2$$

и установить, что ее минимум равен 1. Рассмотрим эту функцию как квадратный трехчлен относительно переменной t . Абсцисса вершины параболы графика

$$t_s = -\frac{3s}{2}$$

и минимальное значение равно

$$f\left(-\frac{3s}{2}, s\right) = \frac{3}{4}s^2$$

Если $|s| \geq 2$, то $f \geq 3$. Остается рассмотреть случаи $s=1, s=-1, s=0$. При $s=1$

$$f = t^2 + 3t + 3$$

Минимум этой функции достигается при $t=-3/2$ и в ближайших целочисленных точках $t=-2$ и $t=-1$ функция равна 1. Следовательно, для целочисленного аргумента минимум этой функции равен 1. Аналогично рассматривается случай $s=-1$. В этом случае

$$f = t^2 - 3t + 3$$

Минимум этой функции достигается при $t=3/2$ и в ближайших целочисленных точках $t=1$ и $t=2$ функция равна 1. Следовательно, для целочисленного аргумента минимум этой функции также равен 1. Остается последний случай $s=0$. Для этого варианта

$$f = t^2$$

Точка минимума здесь $t=0$. Так как точка $(0,0)$ не участвует в рассмотрении, то брать ближайшие целочисленные точки ± 1 , в которых функция равна 1. Наше утверждение доказано, поэтому минимально возможное значение площади равно $\sqrt{3}$.

Перейдем ко второму вопросу – сколько треугольников имеют площадь $39\sqrt{3}$. Для этого нужно ответить на вопрос о числе решений уравнения

$$S(t, s) = 39\sqrt{3}$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt{3}(t^2 + 3ts + 3s^2) = 39\sqrt{3}$$

$$t^2 + 3ts + 3s^2 = 39$$

Так как

$$t^2 = 39 - 3ts - 3s^2$$

то t кратно 3:

$$t = 3k \Rightarrow 9k^2 + 9ks + 3s^2 = 39$$

$$3k^2 + 3ks + s^2 = 13$$

Дискриминант квадратного трехчлена по переменной s должен быть неотрицательным для целых k :

$$D = 9k^2 - 4(3k^2 - 13) = 52 - 3k^2 \geq 0 \Leftrightarrow s \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\}$$

Далее рассматриваем все возможные случаи

$$k = 0 \rightarrow s^2 = 13 \text{ (не подходит)}$$

$$k = 1 \rightarrow s^2 + 3s - 10 = 0 \rightarrow \begin{cases} s = -5 \\ s = 2 \end{cases}$$

$$k = -1 \rightarrow s^2 - 3s - 10 = 0 \rightarrow \begin{cases} s = -2 \\ s = 5 \end{cases}$$

$$k = 2 \rightarrow s^2 + 6s - 1 = 0 \text{ (не подходит)}$$

$$k = -2 \rightarrow s^2 - 6s - 1 = 0 \text{ (не подходит)}$$

$$k = 3 \rightarrow s^2 + 9s + 14 = 0 \rightarrow \begin{cases} s = -2 \\ s = -7 \end{cases}$$

$$k = -3 \rightarrow s^2 - 9s + 14 = 0 \rightarrow \begin{cases} s = 2 \\ s = 7 \end{cases}$$

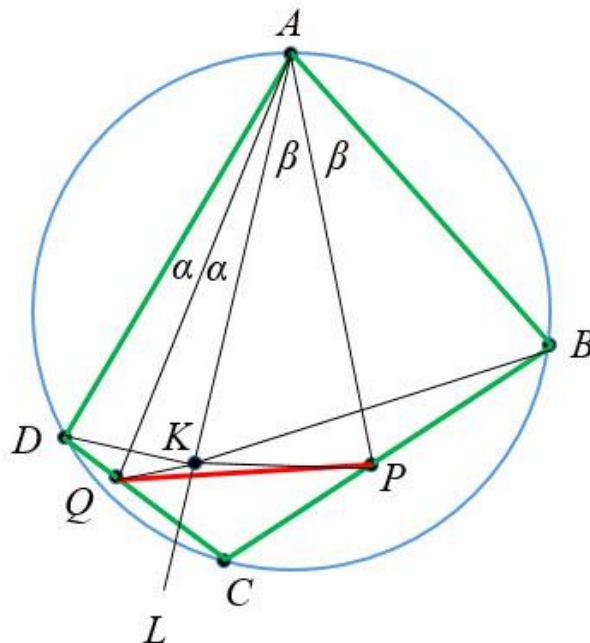
$$k = 4 \rightarrow s^2 + 12s + 35 = 0 \rightarrow \begin{cases} s = -5 \\ s = -7 \end{cases}$$

$$k = -4 \rightarrow s^2 - 12s + 35 = 0 \rightarrow \begin{cases} s = 5 \\ s = 7 \end{cases}$$

Всего 12 треугольников.

Задача 6 Ответ: 3.

Решение. Обозначим длины отрезков BP и DQ через a и b соответственно.



Пусть прямая AQ составляет угол α со стороной AD , а прямая AP – угол β со стороной AB . Проведем прямую AL , составляющую угол α с прямой AQ . Тогда по условию она составляет угол β с прямой AP . Отложим

на прямой AL отрезок AK по длине равный AB . Точка K симметрична точкам D и B относительно прямых AQ и AP . Докажем, что точка K лежит на отрезке PQ .

Действительно,

$$\angle PKA = \angle CBA, \angle QKA = \angle CDA$$

Складывая равенства, получим

$$\angle PKA + \angle QKA = \angle CBA + \angle CDA = 180^\circ$$

как сумма противоположных углов описанного четырехугольника. Это означает, что угол

$$\angle QKP = 180^\circ$$

и точка K лежит на отрезке PQ . Его длина равна сумме длин отрезков KP и KQ , т.е. $a+b$.

В данном варианте $a=2$, $b=1$, следовательно, $PQ=3$.

Вариант 2

Задача 1 Ответ: 10,5

Задача 2 Ответ: $2 \cos \frac{13\pi}{18}$, $2 \cos \frac{11\pi}{18}$

Задача 3 Ответ:
$$\begin{cases} a = 1, c = 16 \\ a = 4, c = 4 \\ a = 16, c = 4 \end{cases}$$

Задача 4 Ответ: $p = 1 - \frac{15}{12^4}$

Задача 5 Ответ: минимально возможная площадь равна $36\sqrt{3}$, число треугольников с площадью $108\sqrt{3}$ равно 6.

Задача 6 Ответ: 5.

Вариант 3

Задача 1 Ответ: 31,25

Задача 2 Ответ: $\operatorname{tg} \frac{\pi}{9}$, $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{9}$

Задача 3 Ответ: $a = k^2$, $b = 8k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Задача 4 Ответ: $p = \frac{5}{36}$

Задача 5 Ответ: минимально возможная площадь равна $12\sqrt{3}$, число треугольников с площадью $48\sqrt{3}$ равно 6.

Задача 6 Ответ: 7.

Вариант 4

Задача 1 Ответ: 10

Задача 2 Ответ: $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{18}$, $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{7\pi}{18}$

Задача 3 Ответ: $b = 8k$, $c = k^2$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Задача 4 Ответ: $p = \frac{56}{9^5}$

Задача 5 Ответ: минимально возможная площадь равна $16\sqrt{3}$, треугольников с площадью $412\sqrt{3}$ нет.

Задача 6 Ответ: 6.