Заключительный тур олимпиады «Росатом», 9 класс, Москва, Россия, март 2020

Вариант № 1

1. Трасса для автомобильных гонок содержит три участка: шоссейный, грунтовый и грязевой. Скорость движения двух автомобилей, участвующих в гонке, на каждом участке трассы одинаковая, равная 160, 60 и 20км/час соответственно. Отчет времени пошел в тот момент, когда красный автомобиль находился на шоссе в 400м впереди белого автомобиля, а он в этот момент пересекал линию старта в начале шоссейного участка. Найти расстояние между автомобилями в моменты времени, когда оба они находились на грунтовом участке трассы. Найти расстояние между автомобилями в момент, когда они оба находились на грязевом участке трассы.

2. Найти девять натуральных чисел кратных шести, среди которых ни одно число не кратно другому, но куб каждого числа кратен квадрату любого из них.

3. Ненулевые целые числа a, b, c являются тремя последовательными членами возрастающей арифметической прогрессии. Все шесть квадратных уравнений, коэффициентами которых являются числа $a, b, c,$ взятые в произвольном порядке, имеют два корня. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение разности прогрессии и соответствующие ей числа $a, b, c.$

4. В тетради написаны n целых чисел, упорядоченных по убыванию $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$ и имеющих сумму $120.$ Известно, что k-ое по порядку написанное число $a_k,$ кроме последнего, полученного при $k = n$, в $(k+1)$ раз меньше суммы всех остальных написанных чисел. Найти максимальное число n возможное при этих условиях. Найти эти числа для максимально возможного n.

5. В треугольнике ABC проведены срединные перпендикуляры к сторонам AB и $AC,$ пересекающие прямые AC и AB в точках

N и M соответственно. Длина отрезка NM равна длине стороны BC треугольника. Найти угол при вершине A треугольника.

Вариант № 2

1. Трасса для автомобильных гонок содержит три участка: шоссейный, грунтовый и грязевой. Скорость движения двух автомобилей, участвующих в гонке, на каждом участке трассы одинаковая, равная 120, 40 и 10км/час соответственно. Отчет времени пошел в тот момент, когда красный автомобиль находился на шоссе в 600м впереди белого автомобиля, а он в этот момент пересекал линию старта в начале шоссейного участка. Найти расстояние между автомобилями в моменты времени, когда оба они находились на грунтовом участке трассы. Найти расстояние между автомобилями в момент, когда они оба находились на грязевом участке трассы.

2. Найти 10 натуральных чисел кратных 15, среди которых ни одно число не кратно другому, но четвертая степень каждого числа кратна кубу любого из них.

3. Ненулевые целые числа a, b, c являются тремя последовательными членами убывающей арифметической прогрессии. Все шесть квадратных уравнений, коэффициентами которых являются числа $2a, 2b, c,$ взятые в произвольном порядке, имеют два корня. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение разности прогрессии и соответствующие ей числа $a, b, c.$

4. В тетради написаны n целых чисел, упорядоченных по убыванию $a_1 > a_2 > ... > a_n$ и имеющих сумму $2520.$ Известно, что k-ое по порядку написанное число a_k, кроме последнего, полученного при $k = n$, в $(k+1)$ раз меньше суммы всех остальных написанных чисел. Найти максимальное число n возможное при этих условиях. Найти эти числа для максимально возможного n.

5. В треугольнике ABC с углом 120^0 при вершине A проведены срединные перпендикуляры к сторонам AB и $AC,$ пересекающие прямые AC и AB в точках N и M соответственно. Длина стороны BC равна $8.$ Найти длину отрезка NM.

Вариант № 3

1. Трасса для автомобильных гонок содержит три участка: шоссейный, грунтовый и грязевой. Скорость движения двух автомобилей, участвующих в гонке, на каждом участке трассы одинаковая, равная 100, 70 и 15км/час соответственно. Отчет времени пошел в тот момент, когда красный автомобиль находился на шоссе в 500м впереди белого автомобиля, а он в этот момент пересекал линию старта в начале шоссейного участка. Найти расстояние между автомобилями в моменты времени, когда оба они находились на грунтовом участке трассы. Найти расстояние между автомобилями в момент, когда они оба находились на грязевом участке трассы.

2. Найти 13 натуральных чисел кратных 21, среди которых ни одно число не кратно другому, но пятая степень каждого числа кратна четвертой степени любого из них.

3. Ненулевые целые числа a, b, c являются тремя последовательными членами возрастающей арифметической прогрессии. Все шесть квадратных уравнений, коэффициентами которых являются числа $a, b, 2c,$ взятые в произвольном порядке, имеют два различных корня. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение разности прогрессии и соответствующие ей числа $a, b, c.$

4. В тетради написаны n целых чисел, упорядоченных по убыванию $a_1 > a_2 > ... > a_n$ и имеющих сумму $420.$ Известно, что k -ое по порядку написанное число $a_k,$ кроме последнего, полученного при $k = n,$ в $(k+1)$ раз меньше суммы всех остальных написанных чисел. Найти максимальное число n возможное при этих условиях. Найти эти числа для максимально возможного $n.$

5. В треугольнике ABC проведены срединные перпендикуляры к сторонам AB и $AC,$ пересекающие прямые AC и AB в точках N и M соответственно. Длина отрезка NM равна длине стороны BC треугольника и равна $2\sqrt{3}.$ Найти радиус окружности, описанной около треугольника $ABC.$

Вариант № 4

1. Трасса для автомобильных гонок содержит три участка: шоссейный, грунтовый и грязевой. Скорость движения двух автомобилей, участвующих в гонке, на каждом участке трассы одинаковая, равная 150, 60 и 18км/час соответственно. Отчет времени пошел в тот момент, когда красный автомобиль находился на шоссе в 300м впереди белого автомобиля, а он в этот момент пересекал линию старта в начале шоссейного участка. Найти расстояние между автомобилями в моменты времени, когда оба они находились на грунтовом участке трассы. Найти расстояние между автомобилями в момент, когда они оба находились на грязевом участке трассы.

2. Найти 15 натуральных чисел кратных 35, среди которых ни одно число не кратно другому, но шестая степень каждого числа кратна пятой степени любого из них.

3. Ненулевые целые числа a, b, c являются тремя последовательными членами убывающей арифметической прогрессии. Все шесть квадратных уравнений, коэффициентами которых являются числа $a, 2b, 4c,$ взятые в произвольном порядке, имеют два корня. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение разности прогрессии и соответствующие ей числа $a, b, c.$

4. В тетради написаны n целых чисел, упорядоченных по убыванию $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$ и имеющих сумму $840.$ Известно, что k -ое по порядку написанное число a_k , кроме последнего, полученного при $k = n,$ в $(k+1)$ раз меньше суммы всех остальных написанных чисел. Найти максимальное число n возможное при этих условиях. Найти эти числа для максимально возможного $n.$

5. В треугольнике ABC проведены срединные перпендикуляры к сторонам AB и AC , пересекающие прямые AC и AB в точках N и M соответственно. Длина отрезка NM равна длине стороны BC треугольника. Угол при вершине C треугольника равен $40^0.$ Найти угол при вершине B треугольника.

Заключительный тур олимпиады «Росатом», 9 класс, СНГ, февраль 2020

Вариант № 1

1. В 9а классе есть ученики, увлеченные кино, но есть и такие, которые увлечены чтением книг. Шестая часть любителей просмотра кинофильмов читает книги, а 20% книголюбов с удовольствием смотрят кино. В классе есть только три ученика, которые не смотрят фильмов и не читают книг. Сколько учеников в 9а классе, если их не менее 25, но не более 35?

2. На окружности отмечены 18 точек и рядом с каждой из них написано число. Каждое число равно модулю разности двух соседних с ним чисел. Наибольшее из чисел равно единице. Найти их сумму.

3. Хорда AB параболы $y=x^2$ пересекает ось ординат в точке C и делится ею в отношении $AC:CB=2:1$. Найти абсциссы точек A и B, если ордината точки C равна 8.

4. Сумма $b_5+b_6+\ldots+b_{2019}$ членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$, $b_n>0$ равна 18, а их произведение $b_5\cdot b_6\cdot\ldots\cdot b_{2019}$ равно 3^{2015}. Найти сумму обратных величин $\frac{1}{b_5}+\frac{1}{b_6}+\ldots+\frac{1}{b_{2019}}$.

5. Известно, что в трапецию с углом 30^0 при основании можно вписать окружность и около нее можно описать окружность. Найти отношение площади трапеции к площади, вписанного в нее круга. Найти отношение площади трапеции к площади, описанного около нее круга.

Вариант № 2

1. В $9^{б}$ классе 25% любителей рока с удовольствием слушают классическую музыку, а пятая часть любителей классики слушает рок. Только два ученика в классе не слушают музыку. Сколько учеников в $9^{б}$ классе, если известно, что их не менее 25, но не более 30?

2. На окружности отмечены 15 точек и рядом с каждой из них написано число. Каждое число равно модулю разности двух соседних с ним чисел. Наибольшее из чисел равно двум. Найти сумму квадратов написанных чисел.

3. Хорда AB параболы $y = x^2$ пересекает ось ординат в точке C и делится ею в отношении $AC : CB = 5 : 3$ Найти абсциссы точек A и B, если ордината точки C равна 15.

4. Сумма $b_7 + b_6 + \ldots + b_{2019}$ членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$, $b_n > 0$ равна 27, а сумма их обратных величин $\frac{1}{b_7} + \frac{1}{b_6} + \ldots + \frac{1}{b_{2019}}$ равна 3. Найти произведение $b_7 \cdot b_6 \cdot \ldots \cdot b_{2019}$.

5. Известно, что в трапецию с углом 60^0 при основании можно вписать окружность и около нее можно описать окружность. Найти отношение периметра трапеции к длине, вписанной в нее окружности. Найти отношение периметра трапеции к длине, описанной около нее окружности.

Вариант № 3

1. В $9^{в}$ классе пятая часть любителей сладкого любят поесть соленого, а треть любителей соленого не отказывается от сладкого. Только четыре ученика не едят ни сладкого, ни соленого. Сколько учеников в $9^{в}$ классе, если их не менее 30 и не более 36?

2. На окружности отмечены 12 точек и рядом с каждой из них написано число. Каждое число равно модулю разности двух соседних с ним чисел. Сумма всех чисел равна 24. Найти наибольшее из них.

3. Хорда AB параболы $y = x^2$ пересекает ось ординат в точке C и делится ею в отношении $AC : CB = 3 : 2$. Найти абсциссы точек A и B, если ордината точки C равна 12.

4. Сумма $b_6 + b_7 + \ldots + b_{2018}$ членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$, $b_n > 0$ равна 6. Сумма тех же членов взятых с чередованием знаков $b_6 - b_7 + b_8 - \ldots - b_{2017} + b_{2018}$ равна 3. Найти сумму квадратов тех же членов $b_6^2 + b_7^2 + \ldots + b_{2018}^2$.

5. Известно, что в трапецию $ABCD$, у которой диагональ BD образует с основанием угол 45^0, можно вписать окружность и около нее можно описать окружность. Найти отношение площади трапеции к площади, вписанного в нее круга. Найти отношение площади трапеции к площади, описанного около нее круга.

Вариант № 4

1. В $9^г$ классе 25% учеников, играющих в футбол, занимаются шахматами, а каждый седьмой любитель шахмат играет в футбол. Только один ученик не играет в футбол и не играет в шахматы. Сколько учеников в $9^г$ классе, если их не менее 18, но не более 25?

2. На окружности отмечены 9 точек и рядом с каждой из них написано число. Каждое число равно модулю разности двух соседних с ним чисел. Наибольшее из чисел равно четырем. Найти сумму кубов этих чисел.

3. Хорда AB параболы $y = x^2$ пересекает ось ординат в точке C и делится ею в отношении $AC : CB = 5 : 2$ Найти абсциссы точек A и B, если ордината точки C равна 20.

4. Сумма $b_8^2 + b_9^2 + ... + b_{2020}^2$ квадратов членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$, $b_n > 0$ равна 4. Сумма их обратных величин $\frac{1}{b_8^2} + \frac{1}{b_9^2} + ... + \frac{1}{b_{2020}^2}$ равна 1. Найти произведение $b_8^2 \cdot b_9^2 \cdot ... \cdot b_{2020}^2$.

5. Известно, что в трапецию $ABCD$, у которой диагональ BD образует с основанием угол 30^0, можно вписать окружность и около нее можно описать окружность. Найти отношение периметра трапеции к длине, вписанной в нее окружности. Найти отношение периметра трапеции к длине, описанной около нее окружности.