Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, осень 2019
11 класс

Вариант № 1

1. Каждого студента, присутствующего на лекции, можно отнести хотя бы к одной из трех категорий: отличник, спортсмен, блондин. Известно, что каждый четвертый блондин занимается спортом, а четверть спортсменов – блондины. Каждый третий спортсмен отличник, а треть отличников – не занимается спортом. Наконец, $5/12$ отличников – блондины, а $5/24$ блондинов – отличники. Только два студента блондина являются спортсменами и отличниками одновременно. Сколько студентов слушают лекцию, если по мнению лектора их не более восьмидесяти?

2. На плоскости расположены четырехугольники, координаты $(x; y)$ вершин которых удовлетворяют уравнению $4x^2 - 4x\sin(x\pi + y) + 1 = 0$. Найти минимально возможное значение площадей таких четырехугольников

3. Действительные числа x_1, x_2 и x_3 являются тремя корнями уравнения $3x^3 - px^2 + 28x - p = 0$ с учетом их возможной кратности. Найти наименьшее при этих условиях значение выражения $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2$. При каком p оно реализуется?

4. Блоха Кузя может совершать прыжки из каждой вершины правильного тетраэдра $ABCD$ в три соседние вершины, причем выбор этих вершин случайный и равновозможный. Прыгать Кузя начала из вершины A и, совершив 2020 прыжков, опять оказалась в той же вершине. С какой вероятностью это могло произойти?

5. Сколько существует различных пар целых чисел a и b, для которых уравнение $ax^2 + bx + 108 = 0$ имеет целые положительные корни?

6. Окружность радиуса 1 касается прямой P в точке A и прямой Q в точке B так, что хорда стягивает дугу окружности в 60^0. Прямые P и Q пересекаются в точке F. Точка C расположена на луче AF, а точка D – на луче FB так, что $AC = BD = 2$.

Найти длину медианы треугольника CBD, проведенной из вершины B.

Вариант № 2

1. Каждого спортсмена, участвующего в марафоне, можно отнести хотя бы к одной из трех категорий: веселые, тренированные, новички. Известно, что каждый шестнадцатый веселый – новичок, а пятая часть новичков – веселятся. Каждый пятый тренированный спортсмен веселый и только каждый десятый весельчак тренирован. Наконец, пятая часть новичков оказалась тренированной, а каждый восьмой из тренированных – новичок. Только три участника марафона являются тренированными, веселыми новичками одновременно. Сколько спортсменов вышло на старт, если им было выдано не более 150 номеров?

2. На плоскости расположены четырехугольники, координаты $(x;y)$ вершин которых удовлетворяют уравнению $16x^2-8x\sin(2x\pi+3y)+1=0.$ Найти минимально возможное значение площадей таких четырехугольников.

3. Действительные числа x_1, x_2 и x_3 являются тремя корнями уравнения $x^3-3x^2+2(1-p)x+4=0$ с учетом их возможной кратности. Найти наименьшее при этих условиях значение выражения $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+(x_3-1)^2$. При каком p оно реализуется?

4. Блоха Кузя может совершать прыжки из каждой вершины правильного тетраэдра $ABCD$ в три соседние вершины, причем выбор этих вершин случайный и равновозможный. Прыгать Кузя начала из вершины A и, совершив 2024 прыжка, оказалась не в вершине A. С какой вероятностью это могло произойти?

5. Сколько существует различных пар целых чисел a и b, для которых уравнение $ax^2+bx+16875=0$ имеет целые положительные корни?

6. Окружность радиуса 2 касается прямой P в точке A и прямой Q в точке B так, что хорда AB стягивает дугу окружности в 60^0. Прямые P и Q пересекаются в точке F. Точка C расположена на луче FA, а точка D – на луче BF так, что $AC=BD=3$. Найти длину медианы треугольника CBD, проведенной из вершины B.

Вариант № 3

1. В процессе опроса группы старшеклассников выяснилось, что каждого из них можно отнести хотя бы к одной из трех категорий: умеющих водить автомобиль, мотоцикл и кататься на самокате. Известно, что каждый шестой водитель автомобиля может управлять мотоциклом, а каждый третий мотоциклист способен вести автомобиль. Каждый четвертый автомобилист может ехать на самокате, при этом шестая часть самокатчиков может управлять автомобилем. Наконец, каждый четвертый мотоциклист может ехать на самокате, при этом только двенадцатая часть самокатчиков может управлять мотоциклом. Только один самокатчик признался, что умеет ездить на машине и мотоцикле. Сколько школьников участвовало в опросе, если анкет было выдано не более семидесяти?

2. На плоскости расположены четырехугольники, координаты $(x;y)$ вершин которых удовлетворяют уравнению $9x^2-6x\cos\left(\dfrac{3\pi x}{2}+2y\right)+1=0.$ Найти минимально возможное значение площадей таких четырехугольников.

3. Действительные числа x_1, x_2 и x_3 являются тремя корнями уравнения $2x^3-(p-4)x^2-(2p-1)x-p+8=0$ с учетом их возможной кратности. Найти наименьшее при этих условиях значение выражения $x_1^2+x_2^2+x_3^2$. При каком p оно реализуется?

4. Блоха Кузя может совершать прыжки из каждой вершины правильного тетраэдра $ABCD$ в три соседние вершины, причем выбор этих вершин случайный и равновозможный. Прыгать Кузя начала из вершины A и, совершив 2019 прыжков, оказалась в вершине B. С какой вероятностью это могло произойти?

5. Сколько существует различных пар целых чисел a и b, для которых уравнение $ax^2+bx+1944=0$ имеет целые положительные корни?

6. Окружность радиуса 3 касается прямой P в точке A и прямой Q в точке B так, что хорда AB стягивает дугу окружности в 60^0. Прямые P и Q пересекаются в точке F. Точка C расположена на луче AF, а точка D – на луче FB так, что $AC = BD = 4$. Найти длину медианы треугольника CAD, проведенной из вершины A.

Вариант № 4

1. Выяснилось, что каждого из опрошенных можно отнести хотя бы к одной из трех категорий: любитель рока, джаза и классики. Известно, что каждый пятый любитель рока с удовольствием слушает джаз, а каждый третий поклонник джаза слушает рок. Четыре из каждых пятнадцати любителей классики могут слушать рок, а пятая часть поклонников рока получает удовольствие, слушая классику. Наконец, каждый пятый любитель классики является поклонником джаза, а четвертая часть джазовых фанатов слушает классику. Пять любителей рока считают себя поклонниками джаза и классики. Сколько человек было опрошено, если их число не превысило девяносто?

2. На плоскости расположены четырехугольники, координаты $(x;y)$ вершин которых удовлетворяют уравнению $36x^2-12x\cos(3\pi x+4y)+1=0.$ Найти минимально возможное значение площадей таких четырехугольников.

3. Действительные числа x_1, x_2 и x_3 являются тремя корнями уравнения $x^3-(p+4)x^2+(4p+5)x-4p-5=0$ с учетом их возможной кратности. Найти наименьшее при этих условиях значение выражения $(x_1+1)^2+(x_2+1)^2+(x_3+1)^2$. При каком p оно реализуется?

4. Блоха Кузя может совершать прыжки из каждой вершины правильного тетраэдра $ABCD$ в три соседние вершины, причем выбор этих вершин случайный и равновозможный. Прыгать Кузя начала из вершины A и, совершив 2018 прыжков, оказалась в вершине C. С какой вероятностью это могло произойти?

5. Сколько существует различных пар целых чисел a и b, для которых уравнение $ax^2+bx+432=0$ имеет целые положительные корни?

6. Окружность радиуса 4 касается прямой P в точке A и прямой Q в точке B так, что хорда AB стягивает дугу окружности в 60^0. Прямые P и Q пересекаются в точке F. Точка C расположена на луче FA, а точка D – на луче BF так, что $AC=BD=5$. Найти длину медианы треугольника CAD, проведенной из вершины A.

Очный отборочный тур олимпиады «Росатом» в регионах, осень 2019
11 класс, комплект 1

Вариант № 1

1. Петя совершает поездку на автомобиле от пункта А до пункта Б, расстояние между которыми 270 км. Маршрут поездки выведен на дисплей компьютера. Петя может в каждый момент времени t (часы) получать информацию о пройденном пути $s(t)$ (км), скорости движения $v(t)$ (км/час) и предполагаемом времени $T = T(t)$ (час) до окончания поездки. В программу вычисления $T(t)$ заложено предположение о том, что оставшуюся часть пути автомобиль будет ехать со скоростью, равной средней скорости его движения на отрезке времени $[0;t]$. На интервале времени $[0,5;1]$ Петя заметил, что $T > 1$ и не меняется. Через час после начала движения, он посмотрел на спидометр – 60 км/час. На каком расстоянии от пункта A находился автомобиль в этот момент? С какой скоростью двигался автомобиль спустя 30 мин после начала движения?

2. Решить систему $\begin{cases} \cos x \cdot \cos(xy) = 1 \\ 15y^2 = 6 + y\cos\left(x/2\right) \end{cases}$.

3. Известно, что для некоторых положительных взаимно простых чисел m и n числа $m + 2019n$ и $n + 2019m$ имеют общий простой делитель $d > 5$. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение числа d .

4. Случайная величина a равномерно распределена на отрезке $[-1;5]$. Найти вероятность того, что все корни квадратного уравнения $x^2 - ax + a - 3 = 0$ не меньше -1.

5. При каких значениях a уравнение $x^3 - 3(a-2)x + 3(a-2) = 0$ имеет ровно два корня? Найти эти корни.

6. На стороне AC треугольника ABC расположена точка D так, что $AD : AC = 1 : 4$, при этом $2BD + BC = 3AB$. Вписанная в треугольник окружность с центром в точке O пересекает BD в точках M и N. Найти угол MON.

Вариант № 2

1. Костя совершает поездку на автомобиле от пункта А до пункта Б, расстояние между которыми 320 км. Маршрут поездки выведен на дисплей компьютера. Костя может в каждый момент времени t (часы) получать информацию о пройденном пути $s(t)$ (км), скорости движения $v(t)$ (км/час) и предполагаемом времени $T = T(t)$ (час) до окончания поездки. В программу вычисления $T(t)$ заложено предположение о том, что оставшуюся часть пути автомобиль будет ехать со скоростью, равной средней скорости его движения на отрезке времени $[0;t]$. Через час после начала движения, он посмотрел на спидометр – 60 км/час. На интервале времени $[1;2]$ Костя заметил, что $T > 1$ и не меняется. На каком расстоянии от пункта A находился автомобиль через два часа после начала движения? С какой скоростью двигался автомобиль спустя 2 часа после начала движения?

2. Решить систему $\begin{cases} \sin x \cdot \cos(xy) = -1 \\ 10y^2 - ytg\left(x/2\right) = 2 \end{cases}$.

3. Известно, что для некоторых положительных взаимно простых чисел m и n числа $m + 2024n$ и $n + 2024m$ имеют общий простой делитель $d > 7$. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение числа d .

4. Случайная величина a равномерно распределена на отрезке $[-4;4]$. Найти вероятность того, что хотя бы один из корней квадратного уравнения $x^2 - 2ax - a - 4 = 0$ по абсолютному значению не превосходит 1.

5. При каких значениях a уравнение

$$x^3 - 12(a-1)x + 4(a+2) = 0$$

имеет ровно два корня? Найти эти корни.

6. На стороне AC треугольника ABC расположена точка D так, что $AD:AC=1:3$, при этом $BD+2BC=4AB$. Вписанная в треугольник окружность с центром в точке O пересекает BD в точках M и N. Найти угол MON.

Вариант № 3

1. Вася совершает поездку на автомобиле от пункта А до пункта Б, расстояние между которыми 360 км. Маршрут поездки выведен на дисплей компьютера. Вася может в каждый момент времени t (часы) получать информацию о пройденном пути $s(t)$ (км), скорости движения $v(t)$ (км/час) и предполагаемом времени $T = T(t)$ (час) до окончания поездки. В программу вычисления $T(t)$ заложено предположение о том, что оставшуюся часть пути автомобиль будет ехать со скоростью, равной средней скорости его движения на отрезке времени $[0;t]$. На интервале времени $[0,5;1,5]$ Вася заметил, что $T > 1$ и не меняется. Через час после начала движения, он посмотрел на спидометр – 80 км/час. На каком расстоянии от пункта A находился автомобиль в этот момент? С какой скоростью двигался автомобиль спустя 30 мин после начала движения?

2. Решить систему $\begin{cases} \sin(xy)\cdot\cos x = 1 \\ 8y^2 = 2y\sin\left(x/2\right)+15 \end{cases}$.

3. Известно, что для некоторых положительных взаимно простых чисел m и n числа $m+1941n$ и $n+1941m$ имеют общий простой делитель $d > 8$. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение числа d .

4. Случайная величина a равномерно распределена на отрезке $[-2;1]$. Найти вероятность того, что все корни квадратного уравнения $ax^2 - x - 4a + 1 = 0$ по абсолютному значению превосходят 1.

5. При каких значениях a уравнение

$$x^3 + 27(a+1)x + 18(a-1) = 0$$

имеет ровно два корня? Найти эти корни.

6. На стороне AC треугольника ABC расположена точка D так, что $AD : AC = 1 : 5$, при этом $5\sqrt{2}\cdot BD + 2BC = 8AB$. Вписанная в треугольник окружность с центром в точке O пересекает BD в точках M и N . Найти угол MON .

Вариант № 4

1. Даня совершает поездку на автомобиле от пункта А до пункта Б, расстояние между которыми 300 км. Маршрут поездки выведен на дисплей компьютера. Даня может в каждый момент времени t (часы) получать информацию о пройденном пути $s(t)$ (км), скорости движения $v(t)$ (км/час) и предполагаемом времени $T = T(t)$ (час) до окончания поездки. В программу вычисления $T(t)$ заложено предположение о том, что оставшуюся часть пути автомобиль будет ехать со скоростью, равной средней скорости его движения на отрезке времени $\left[0;t\right]$. Через час после начала движения, он посмотрел на спидометр – 75 км/час. На интервале времени $\left[1;1,5\right]$ Даня заметил, что T не меняется. На каком расстоянии от пункта A находился автомобиль через 90 мин после начала движения и какова была его скорость?

2. Решить систему $\begin{cases} \sin x \cdot \sin(xy) = -1 \\ 6y^2 = ytg\left(x/2\right) + 1 \end{cases}$.

3. Известно, что для некоторых положительных взаимно простых чисел m и n числа $m + 1947n$ и $n + 1947m$ имеют общий простой делитель $d > 9$. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение числа d .

4. Случайная величина a равномерно распределена на отрезке $\left[-1;4\right]$. Найти вероятность того, что оба корня квадратного уравнения $ax^2 + 4x + a - 3 = 0$ отрицательные.

5. При каких значениях a уравнение

$$x^3 + 48(a+2)x + 32(a-1) = 0$$

имеет ровно два корня? Найти эти корни.

6. На стороне AC треугольника ABC расположена точка D так, что $AD : AC = 2 : 5$, при этом $BD + 2BC = 3AB$. Вписанная в треугольник окружность с центром в точке O пересекает BD в точках M и N . Найти угол MON .

Примеры заданий из базы заданий дистанционного отборочного тура олимпиады «Росатом», 11 класс

База заданий дистанционного отборочного тура олимпиады «Росатом» (который проводится только для школьников 11 класса) содержит более 300 задач с числовым ответом (который и проверяется). Эти задачи ежегодно обновляются, добавляются новые, меняются числа в каждой задаче. Каждый участник тура получает 6 задач случайным образом. Чтобы исключить ошибки, связанные с округлением ответа (если ответ нецелый), в каждой такой задаче задается небольшой интервал значений, все ответы из которого считаются правильными. Для прохода в заключительный тур нужно было решить пять задач из шести.

1. Найдите наибольшее на отрезке $[0;10\pi]$ решение уравнения $|2\sin x-1|+|2\cos 2x-1|=0$.
Ответ округлить до трех значащих цифр по правилам округления и ввести в предложенное поле.

2. Найти длину ломанной на плоскости, координаты точек $(x;y)$, которой удовлетворяют условию: $\begin{cases} |2y-|x||-x=2 \\ -2\le x\le 1 \end{cases}$. Ответ округлить до трех значащих цифр по правилам округления и ввести в предложенное поле.

3. Сумма двух натуральных чисел равна 2013. Если у одного из них зачеркнуть две последние цифры, прибавить к полученному числу единицу, а затем умножить результат на пять, то получится другое число. Найти эти числа. Наибольшее из них ввести в предложенное поле.

4. Сумма двух натуральных чисел равна 2014. Если у одного из них зачеркнуть две последние цифры, умножить полученный результат на три, то получится число на шесть большее другого числа. Найти эти числа. Наименьшее из них ввести в предложенное поле.

5. Найти дробь $\frac{p}{q}$ с наименьшим возможным натуральным знаменателем, для которой

$\frac{1}{2014}<\frac{p}{q}<\frac{1}{2013}$. Знаменатель этой дроби введите в предложенное поле

6. Сколько существует пар натуральных чисел $(a;b)$, для которых число $5a-3$ кратно b, а число $5b-1$ кратно a? Количество пар указанных чисел ввести в предложенное поле.

7. Координаты $(x;y;z)$ точки M являются последовательными членами геометрической прогрессии, а числа $xy,\ yz,\ xz$ в указанном порядке являются членами арифметической прогрессии, при этом $z\geq 1$ и $x\neq y\neq z$. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение квадрата расстояния от точки M до точки $N(1;1;1)$. Ответ ввести в предложенное поле.

8. Жители деревни Разумеево, удаленной от реки на 3 км, любят ходить в гости в деревню Вкуснотеево, расположенную на $3{,}25$ км. ниже по течению, на другом берегу реки, удаленную от берега на 1 км. Ширина реки 500 м, скорость течения $1\,км/час$, берега – параллельные прямые. Жители Разумеево проложили самый короткий маршрут с учетом того, что переплывают реку всегда в направлении перпендикулярном береговой линии с собственной скоростью $2\,км/час$. Сколько времени занимает этот путь, если по земле можно передвигаться со скоростью не большей $4\,км/час$? Ответ в часах ввести в предложенное поле.

9. Найти последние две цифры числа $14^{14^{14}}$. Ответ ввести в предложенное поле.

10. Найти число двоек в разложении на множители числа $2011\cdot 2012\cdot 2013\cdot\ldots\cdot 4020.$ Ответ ввести в предложенное поле.

11. При каких a уравнение $|x|=ax-2$ не имеет решений? Длину промежутка значений параметра a введите в предложенной поле.

12. При каких a уравнение $|x-3|=ax-1$ имеет два решения? Середину промежутка значений параметра a введите в предложенное поле. Ответ округлить до трех значащих цифр по правилам округления и записать в предложенное поле.

13. При каком значении a уравнение $|x-2| = ax - 2$ имеет бесконечное число решений? Ответ ввести в предложенное поле.