

**Заключительный тур олимпиады «Росатом»,
11 класс, Россия, март 2020**

Вариант № 1

1. Найти целые числа x и y , для которых

$$\log_2 \left(\frac{x}{17} + \frac{y}{5} \right) = \log_2 \frac{x}{17} + \log_2 \frac{y}{5}.$$

2. При каких целых n функция $f(x) = \sin(nx) \cdot \cos \frac{6x}{n+1}$ имеет период $T = 5\pi$?

3. Доказать, что существует набор натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2019}$, для которых $2 \cdot \text{НОК}(a_1, a_2, \dots, a_{2019}) = a_1 + a_2 + \dots + a_{2019}$.

4. Саша и Маша задают друг другу по пять каверзных вопросов и отвечают на них, не задумываясь, случайным образом. Вероятность того, что на заданный Машей вопрос Саша скажет неправду, не зависит от номера вопроса и равна $\frac{1}{2}$. Маша на вопрос Саши дает правдивый ответ с вероятностью $\frac{2}{3}$ независимо от порядка вопроса. После окончания диалога выяснилось, что Маша дала на два правдивых ответа больше, чем Саша. С какой вероятностью это могло произойти?

5. Арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ с ненулевой разностью такова, что последовательность $b_n = a_n \cdot \sin a_n$ также арифметическая прогрессия с ненулевой разностью. Найти возможные значения первого члена и разности прогрессии $\{a_n\}$, если для всех n справедливо равенство $2\cos^2 a_n = \cos a_{n+1}$.

6. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC вовне построены два равных прямоугольника $AMNB$ и $APQC$. Найти расстояние между вершинами N и Q прямоугольников, если длины сторон AB и AC равны 3 и 4 соответственно, а угол при вершине A треугольника равен 30° .

Вариант № 2

1. Найти целые числа x и нечетные y , для которых

$$\log_2 \left(\frac{x}{6} + \frac{y}{14} \right) = \log_2 \frac{x}{6} + \log_2 \frac{y}{14}.$$

2. При каких целых n функция $f(x) = \cos((n+1)x) \cdot \sin \frac{8x}{n-2}$ имеет период $T = 3\pi$?

3. Доказать, что существует набор натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2020}$, для которых $3 \cdot \text{НОК}(a_1, a_2, \dots, a_{2020}) = 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{2020})$.

4. Коля и Толя задают друг другу по четыре каверзных вопросов и отвечают на них, не задумываясь, случайным образом. Вероятность того, что на заданный Толей вопрос Коля скажет неправду, не зависит от номера вопроса и равна $\frac{1}{3}$. Толя на вопрос Коли дает

правдивый ответ с вероятностью $\frac{1}{4}$ независимо от порядка вопроса.

После окончания диалога выяснилось, что Коля дал на три правдивых ответа больше, чем Толя. С какой вероятностью это могло произойти?

5. Арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ с ненулевой разностью такова, что последовательность $b_n = a_n \cdot \cos a_n$ также арифметическая прогрессия с ненулевой разностью. Найти возможные значения первого члена и разности прогрессии $\{a_n\}$, если для всех n справедливо равенство $\sin 2a_n + \cos a_{n+1} = 0$.

6. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC вовне построены два равных прямоугольника $AMNB$ и $APQC$. Найти расстояние между вершинами N и Q прямоугольников, если длины сторон AB и AC равны $\sqrt{3}$ и 1 соответственно, а угол при вершине A треугольника равен 60° .

Вариант № 3

1. Найти целые числа y и четные x , для которых

$$\log_2 \left(\frac{x}{7} + \frac{y}{6} \right) = \log_2 \frac{x}{7} + \log_2 \frac{y}{6}.$$

2. При каких целых n функция $f(x) = \sin((2n+1)x) \cdot \sin \frac{5x}{n-1}$ имеет период $T = 7\pi$?

3. Доказать, что существует набор натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2021}$, для которых $4 \cdot \text{НОК}(a_1, a_2, \dots, a_{2021}) = 3 \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_{2021})$.

4. Катя и Паша задают друг другу по четыре каверзных вопросов и отвечают на них, не задумываясь, случайным образом. Вероятность того, что на заданный Пашей вопрос Катя скажет неправду, не зависит от номера вопроса и равна $\frac{1}{3}$. Паша на вопрос Кати дает правдивый ответ с вероятностью $\frac{3}{5}$ независимо от порядка вопроса.

После окончания диалога выяснилось, что Паша дал на два правдивых ответа больше, чем Катя. С какой вероятностью это могло произойти?

5. Арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ с ненулевой разностью такова, что последовательность $b_n = a_n \cdot \operatorname{tg} a_n$ также арифметическая прогрессия. Найти возможные значения первого члена и разности прогрессии $\{a_n\}$, если для всех n справедливо равенство $\sin a_n + \sin a_{n+2} = 1$.

6. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC вовне построены два равных прямоугольника $AMNB$ и $APQC$. Найти расстояние между вершинами N и Q прямоугольников, если длины сторон AB и AC равны $2\sqrt{2}$ и 1 , соответственно, а угол при вершине A треугольника равен 45° .

Вариант № 4

1. Найти целые числа x и y такие, что $x + y$ – четное и

$$\log_2 \left(\frac{x}{5} + \frac{y}{8} \right) = \log_2 \frac{x}{5} + \log_2 \frac{y}{8}.$$

2. При каких целых n функция $f(x) = \cos((n-1)x) \cdot \cos \frac{15x}{2n+1}$ имеет период $T = \pi$?

3. Доказать, что существует набор натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2022}$, для которых $5 \cdot \text{НОК}(a_1, a_2, \dots, a_{2022}) = 4 \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_{2022})$.

4. Аня и Боря задают друг другу по три каверзных вопроса и отвечают на них, не задумываясь, случайным образом. Вероятность того, что на заданный Борей вопрос Аня скажет неправду, не зависит от номера вопроса и равна $\frac{1}{4}$. Боря на вопрос Ани дает правдивый ответ с вероятностью $\frac{2}{5}$ независимо от порядка вопроса. После окончания диалога выяснилось, что Боря дал на один правдивый ответ больше, чем Аня. С какой вероятностью это могло произойти?

5. Арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ с ненулевой разностью такова, что последовательность $b_n = a_n \cdot \operatorname{ctg} a_n$ также арифметическая прогрессия. Найти возможные значения первого члена и разности прогрессии $\{a_n\}$, если для всех n справедливо равенство $\cos a_n + \cos 3a_{n+1} = 0$.

6. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC во вне построены два равных прямоугольника $AMNB$ и $APQC$. Найти расстояние между вершинами N и Q прямоугольников, если длины сторон AB и AC равны 5 и $\sqrt{11}$, соответственно, а угол при вершине A треугольника равен $\arccos \frac{1}{3}$.

**Заключительный тур олимпиады «Росатом»,
11 класс, СНГ, февраль 2020**

Вариант № 1

1. Сколько существует натуральных чисел $n \leq 2020$, для которых дробь $\frac{6n^3 + n^2 - 5n + 12}{6n^2 + 7n + 2}$ сократимая?

2. Решить уравнение $\sin(x(\eta(x) - \eta(x - 7\pi))) = 1 + \cos x$, где $\eta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ – функция Хэвисайда.

3. Доказать, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами выражение $P(b) - P(a)$ делится на $(b - a)$ при любых целых $a, b, a \neq b$. Известно, что уравнение $P(x) = 8$ имеет целый корень на полуоси $x \geq 8$ и $P(4) = 17$. Найти этот корень.

4. Петя, Вася и Иван каждый на своей карточке написал наугад по одной цифре и передали карточки Маше так, чтобы она не видела написанных цифр. Маша случайным образом перемешала карточки и выложила их в ряд на стол. Найти вероятность того, что на столе можно увидеть трехзначное число кратное 5, имеющее при делении на 7 остаток 3.

5. Найти наименьшее положительное значение выражения $x + y$ для всех пар чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $(\sin x + \cos y)(\cos x - \sin y) = 1 + \sin(x - y)\cos(x + y)$.

6. Точка M – середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. Прямая CM наклонена к основанию AD под углом 30° . Вершина B равноудалена от прямой CM и вершины A . Найти углы параллелограмма. Найти площадь параллелограмма, если длина основания AD равна 2.

Вариант № 2

1. Сколько существует натуральных чисел $n \leq 2024$, для которых дробь $\frac{15n^3 + 11n^2 - 8n + 2}{15n^2 - 4n - 4}$ несократимая?

2. Решить уравнение

$$\cos(2x(\eta(x+3\pi) - \eta(x-8\pi))) = \sin x + \cos x,$$

где $\eta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ – функция Хэвисайда.

3. Доказать, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами выражение $P(b) - P(a)$ делится на $(b - a)$ при любых целых $a, b, a \neq b$. Известно, что уравнение $P(x) = 15$ имеет целый корень на полуоси $x \leq -2$ и $P(3) = 7$. Найти этот корень.

4. Петя, Вася и Иван каждый на своей карточке написал наугад по одной цифре и передали карточки Маше так, чтобы она не видела написанных цифр. Маша случайным образом перемешала карточки и выложила их в ряд на стол. Найти вероятность того, что на столе можно увидеть трехзначное число кратное 3, имеющее при делении на 8 остаток 5.

5. Найти наибольшее отрицательное значение выражения $x - y$ для всех пар чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$(\sin x + \sin y)(\cos x - \cos y) = \frac{1}{2} + \sin(x - y) \cos(x + y).$$

6. Точка M – середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. Прямая CM наклонена к основанию AD под углом 45° . Вершина B равноудалена от прямой CM и вершины A . Найти углы параллелограмма. Найти площадь параллелограмма, если длина основания AD равна 1.

Вариант № 3

1. Сколько существует натуральных чисел $n \leq 1947$, для которых дробь $\frac{15n^3 + 17n^2 + n + 14}{15n^2 + 2n - 1}$ сократимая?

2. Решить уравнение $\operatorname{tg}\left(x\left(\eta(x-2\pi)-\eta(x-5\pi)\right)\right)=\frac{1}{\cos^2 x}-1$,
где $\eta(x)=\begin{cases} 1, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$ – функция Хэвисайда.

3. Доказать, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами выражение $P(b)-P(a)$ делится на $(b-a)$ при любых целых $a, b, a \neq b$. Известно, что уравнение $P(x)=-9$ имеет целый корень на полуоси $x > 12$ и $P(5)=-23$. Найти этот корень.

4. Петя, Вася и Иван каждый на своей карточке написал наугад по одной цифре и передали карточки Маше так, чтобы она не видела написанных цифр. Маша случайным образом перемешала карточки и выложила их в ряд на стол. Найти вероятность того, что на столе можно увидеть трехзначное число кратное 4, имеющее при делении на 5 остаток 2.

5. Найти наименьшее положительное значение выражения $x+y$ для всех пар чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $(\operatorname{tg} x - 2)(\operatorname{tg} y - 2) = 5$.

6. Точка M – середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. Прямая CM наклонена к основанию AD под углом 15° . Вершина B равноудалена от прямой CM и вершины A . Найти углы параллелограмма. Найти площадь параллелограмма, если длина основания AD равна 6.

Вариант № 4

1. Сколько существует натуральных чисел $n \leq 1998$, для которых дробь $\frac{21n^3 + 50n^2 + 39n + 31}{21n^2 + 29n + 10}$ несократимая?

2. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} (2x(\eta(x+3\pi)-\eta(x-6\pi))) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x},$$

где $\eta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ – функция Хэвисайда.

3. Доказать, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами выражение $P(b) - P(a)$ делится на $(b - a)$ при любых целых $a, b, a \neq b$. Известно, что уравнение $P(x) = 13$ имеет целый корень на полуоси $x \leq -4$ и $P(-2) = 2$. Найти этот корень.

4. Петя, Вася и Иван каждый на своей карточке написал наугад по одной цифре и передали карточки Маше так, чтобы она не видела написанных цифр. Маша случайным образом перемешала карточки и выложила их в ряд на стол. Найти вероятность того, что на столе можно увидеть трехзначное число кратное 7, имеющее при делении на 3 остаток 1.

5. Найти наибольшее отрицательное значение выражения $x - y$ для всех пар чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $(1 - \operatorname{ctg} x)(1 + \operatorname{ctg} y) = 2$.

6. Точка M – середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. Прямая CM наклонена к основанию AD под углом 75° . Вершина B равноудалена от прямой CM и вершины A . Найти углы параллелограмма. Найти площадь параллелограмма, если длина основания AD равна 4.

**Заключительный тур олимпиады «Росатом»,
11 класс, Москва, март 2020**

Вариант № 1

1. В бассейне, на соседних дорожках тренируются два пловца Петя и Костя. Петя проплывает дорожку 50 м за две минуты, Костя – за три. Вначале тренировки оба находились на линии старта у края дорожки, спустя 60 мин тренировка закончилась. Сколько раз за это время, включая начало, они находились на одинаковом расстоянии от линии старта?

2. При каких значениях a точка с координатами $(\sin a; \sin 3a)$ симметрична точке с координатами $(\cos a; \cos 3a)$ относительно прямой с уравнением $x + y = 0$.

3. Поверхность коробки размером $3 \times 4 \times 5$ разбита на 94 квадрата размером 1×1 . В квадратах, принадлежащих одной грани, написаны одинаковые натуральные числа. На параллельной ей грани коробки эти числа повторяются (на каждой паре параллельных граней числа, вообще говоря, разные). Муравей Гоша совершает путешествия по поверхности коробки, соблюдая следующие правила: 1) маршрут начинается в центре любого из указанных квадратов, заканчивается в нем же и представляет собой замкнутую ломаную, лежащую в плоскости, перпендикулярной одному из ребер коробки; 2) Гоша никогда не меняет направление движения по маршруту; 3) сумма чисел по всем квадратам, встречающимся на пути Гоши, не зависит от маршрута и равна 2880. Какие числа написаны на гранях коробки?

4. Точки P, Q расположены на сторонах AB и AC треугольника ABC так, что $AP : PB = 2 : 1$, $AQ : QC = 1 : 3$. Точка M выбрана на стороне BC совершенно случайно. Найти вероятность того, что площадь треугольника ABC превосходит площадь треугольника PQM не более, чем в три раза. Найти математическое

ожидаение случайной величины – отношения площадей треугольников PQM и ABC .

5. Представить число 2020 в виде суммы кубов пяти целых чисел. Доказать, что любое целое число можно представить в виде суммы кубов пяти целых чисел.

6. В каком отношении $CE:CD$ точка E делит сторону CD основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, боковое ребро которой наклонено к основанию под углом 30° , если известно, что площадь треугольника SBE минимально возможная?

Вариант № 2

1. В бассейне, на соседних дорожках тренируются два пловца Петя и Костя. Петя проплывает дорожку 50 м за две минуты, Костя – за три. Вначале тренировки оба находились на линии старта у края дорожки, спустя 60 мин тренировка закончилась. Сколько раз за это время, включая начало, они находились на одинаковом расстоянии от линии старта?

2. При каких значениях a точка с координатами $(\sin a; \sin 3a)$ симметрична точке с координатами $(\cos a; \cos 3a)$ относительно прямой с уравнением $x + y = 0$.

3. Поверхность коробки размером $3 \times 4 \times 5$ разбита на 94 квадрата размером 1×1 . В квадратах, принадлежащих одной грани, написаны одинаковые натуральные числа. На параллельной ей грани коробки эти числа повторяются (на каждой паре параллельных граней числа, вообще говоря, разные). Муравей Гоша совершает путешествия по поверхности коробки, соблюдая следующие правила: 1) маршрут начинается в центре любого из указанных квадратов, заканчивается в нем же и представляет собой замкнутую ломаную, лежащую в плоскости, перпендикулярной одному из ребер коробки; 2) Гоша никогда не меняет направление движения по маршруту; 3) сумма чисел по всем квадратам, встречающимся на пути Гоши, не зависит от маршрута и равна 2880. Какие числа написаны на гранях коробки?

4. Точки P, Q расположены на сторонах AB и AC треугольника ABC так, что $AP : PB = 2 : 1$, $AQ : QC = 1 : 3$. Точка M выбрана на стороне BC совершенно случайно. Найти вероятность того, что площадь треугольника ABC превосходит площадь треугольника PQM не более, чем в три раза. Найти математическое ожидание случайной величины – отношения площадей треугольников PQM и ABC .

5. Представить число 2020 в виде суммы кубов пяти целых чисел. Доказать, что любое целое число можно представить в виде суммы кубов пяти целых чисел.

6. В каком отношении $CE:CD$ точка E делит сторону CD основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, боковое ребро которой наклонено к основанию под углом 30° , если известно, что площадь треугольника SBE минимально возможная?

Вариант № 3

1. В бассейне, на соседних дорожках тренируются два пловца Петя и Костя. Петя проплывает дорожку 50 м за одну минуту, Костя – за 80 сек. Вначале тренировки оба находились на линии старта у края дорожки, спустя 45 мин тренировка закончилась. Сколько раз за это время, включая начало, они находились на одинаковом расстоянии от линии старта?

2. При каких значениях a точка с координатами $(\sin 2a; \cos 3a)$ симметрична точке с координатами $(\sin 3a; \cos 2a)$ относительно оси ординат.

3. Поверхность коробки размером $3 \times 5 \times 7$ разбита на 142 квадрата размером 1×1 . В квадратах, принадлежащих одной грани, написаны одинаковые натуральные числа. На параллельной ей грани коробки эти числа повторяются (на каждой паре параллельных граней числа, вообще говоря, разные). Муравей Гоша совершает путешествия по поверхности коробки, соблюдая следующие правила: 1) маршрут начинается в центре любого из указанных квадратов, заканчивается в нем же и представляет собой замкнутую ломаную, лежащую в плоскости, перпендикулярной одному из ребер коробки; 2) Гоша никогда не меняет направление движения по маршруту; 3) сумма чисел по всем квадратам, встречающимся на пути Гоши, не зависит от маршрута и равна 1260. Какие числа написаны на гранях коробки?

4. Точки P, Q расположены на сторонах AB и AC треугольника ABC так, что $AP:PB=1:3$, $AQ:QC=1:1$. Точка M выбрана на стороне BC совершенно случайно. Найти вероятность того, что площадь треугольника ABC превосходит площадь треугольника PQM не более, чем в шесть раз. Найти математическое ожидание случайной величины – отношения площадей треугольников PQM и ABC .

5. Представить число 1947 в виде суммы кубов пяти целых чисел. Доказать, что любое целое число можно представить в виде суммы кубов пяти целых чисел.

6. В каком отношении $CE : CD$ точка E делит сторону CD основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с углом при вершине 60° , если известно, что площадь треугольника SBE минимально возможная?

Вариант № 4

1. В бассейне, на соседних дорожках тренируются два пловца Петя и Костя. Петя проплывает дорожку 50 м за 42 сек, Костя – за 90 сек. Вначале тренировки оба находились на линии старта у края дорожки, спустя 60 мин тренировка закончилась. Сколько раз за это время, включая начало, они находились на одинаковом расстоянии от линии старта?

2. При каких значениях a точка с координатами $(\cos a; \sin a)$ симметрична точке с координатами $(\cos 2a; -\sin 2a)$ относительно прямой с уравнением $x - y = 0$.

3. Поверхность коробки размером $4 \times 5 \times 6$ разбита на 148 квадратов размером 1×1 . В квадратах, принадлежащих одной грани, написаны одинаковые натуральные числа. На параллельной ей грани коробки эти числа повторяются (на каждой паре параллельных граней числа, вообще говоря, разные). Муравей Гоша совершает путешествия по поверхности коробки, соблюдая следующие правила: 1) маршрут начинается в центре любого из указанных квадратов, заканчивается в нем же и представляет собой замкнутую ломаную, лежащую в плоскости, перпендикулярной одному из ребер коробки; 2) Гоша никогда не меняет направление движения по маршруту; 3) сумма чисел по всем квадратам, встречающимся на пути Гоши, не зависит от маршрута и равна 960. Какие числа написаны на гранях коробки?

4. Точки P, Q расположены на сторонах AB и AC треугольника ABC так, что $AP : PB = 1 : 4$, $AQ : QC = 3 : 1$. Точка M выбрана на стороне BC совершенно случайно. Найти вероятность того, что площадь треугольника ABC превосходит площадь треугольника PQM не более, чем в два раза. Найти математическое ожидание случайной величины – отношения площадей треугольников PQM и ABC .

5. Представить число 1480 в виде суммы кубов пяти целых чисел. Доказать, что любое целое число можно представить в виде суммы кубов пяти целых чисел.

6. В каком отношении $CE : CD$ точка E делит сторону CD основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, противоположные боковые ребра которой составляют угол 60° , если известно, что площадь треугольника SBE минимально возможная?