

**Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, осень 2019**  
**10класс**

**Вариант № 1**

1. На пересечении дорог  $A$  и  $B$  (прямые) находится населенный пункт  $C$  (точка). Саша идет по дороге  $A$  в направлении пункта  $C$ , делая в минуту 60 шагов, с длиной шага  $40$  см. В начале движения Саша находилась на расстоянии  $200$  м от пункта  $C$ . Даня идет в  $C$  по дороге  $B$  со скоростью  $70$  шагов в минуту, с длиной шага  $60$  см и в момент начала их совместного движения находился на расстоянии  $300$  м от  $C$ . Каждый из них, пройдя пункт  $C$ , не останавливаясь, продолжает движение по своей дороге. Фиксируем моменты времени, к которым Даня и Саша сделали каждый целое число шагов. Найти наименьшее возможное расстояние между ними (по дорогам) в такие моменты времени. Какое число шагов сделал каждый из них ко времени, когда это расстояние оказалось минимальным?

2. При каких  $a$  уравнение  $\sin(x + 3a) - \sin 7a \cdot \cos x = 0$  имеет два решения  $x_1$  и  $x_2$ , для которых  $x_1 - x_2 \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$ ?

3. При каких  $x$  уравнение  $y^2 + 16z^2 + 4xyz - 3 = 0$  имеет решение при любых  $y$ ?

4. Натуральное число  $a$  имеет 101 различных делителей, включая 1 и  $a$ . Найти сумму и произведение таких делителей.

5. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  длины сторон  $BC$  и  $AD$  равны  $2\sqrt{3}$  и  $4$  соответственно. Расстояние между серединами диагоналей  $BD$  и  $AC$  равно 1. Найти угол между прямыми  $BC$  и  $AD$ .

## Вариант № 2

1. На пересечении дорог  $A$  и  $B$  (прямые) находится населенный пункт  $C$  (точка). Саша идет по дороге  $A$  в направлении пункта  $C$ , делая в минуту 50 шагов, с длиной шага  $-50$  см. В начале движения Саша находилась на расстоянии 250 м от пункта  $C$ . Даня идет в  $C$  по дороге  $B$  со скоростью 80 шагов в минуту, с длиной шага 40 см и в момент начала их совместного движения находился на расстоянии 300 м от  $C$ . Каждый из них, пройдя пункт  $C$ , не останавливаясь, продолжает движение по своей дороге. Фиксируем моменты времени, к которым Даня и Саша сделали каждый целое число шагов. Найти наименьшее возможное расстояние между ними (по дорогам) в такие моменты времени. Какое число шагов сделал каждый из них ко времени, когда это расстояние оказалось минимальным?

2. При каких  $a$  уравнение  $\sin 5a \cdot \cos x - \cos(x + 4a) = 0$  имеет два решения  $x_1$  и  $x_2$ , для которых  $x_1 - x_2 \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$ ?

3. При каких  $x$  уравнение  $x^2 - 3y^2 - 3z^2 - 2xyz - 4 = 0$  не имеет решений при любых  $z$ ?

4. Натуральное число  $a$  имеет 103 различных делителей, включая 1 и  $a$ . Найти сумму и произведение таких делителей.

5. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  длины сторон  $BC$  и  $AD$  равны 2 и  $2\sqrt{2}$  соответственно. Расстояние между серединами диагоналей  $BD$  и  $AC$  равно 1. Найти угол между прямыми  $BC$  и  $AD$ .

### Вариант № 3

1. На пересечении дорог  $A$  и  $B$  (прямые) находится населенный пункт  $C$  (точка). Саша идет по дороге  $A$  в направлении пункта  $C$ , делая в минуту 40 шагов, с длиной шага  $-65$  см. В начале движения Саша находилась на расстоянии 260 м от пункта  $C$ . Дана идет в  $C$  по дороге  $B$  со скоростью 75 шагов в минуту, с длиной шага 50 см и в момент начала их совместного движения находился на расстоянии 350 м от  $C$ . Каждый из них, пройдя пункт  $C$ , не останавливаясь, продолжает движение по своей дороге. Фиксируем моменты времени, к которым Дана и Саша сделали каждый целое число шагов. Найти наименьшее возможное расстояние между ними (по дорогам) в такие моменты времени. Какое число шагов сделал каждый из них ко времени, когда это расстояние оказалось минимальным?

2. При каких  $a$  уравнение  $\cos(x-a) - \sin(x+2a) = 0$  имеет два решения  $x_1$  и  $x_2$ , для которых  $x_1 - x_2 \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$  ?

3. При каких  $z$  уравнение  $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xyz - 9 = 0$  имеет решение при любых  $y$  ?

4. Натуральное число  $a$  имеет 107 различных делителей, включая 1 и  $a$ . Найти сумму и произведение таких делителей.

5. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  длины сторон  $BC$  и  $AD$  равны 6 и 8 соответственно. Расстояние между серединами диагоналей  $BD$  и  $AC$  равно 5. Найти угол между прямыми  $BC$  и  $AD$ .

## Вариант № 4

1. На пересечении дорог  $A$  и  $B$  (прямые) находится населенный пункт  $C$  (точка). Саша идет по дороге  $A$  в направлении пункта  $C$ , делая в минуту 45 шагов, с длиной шага  $-60$  см. В начале движения Саша находилась на расстоянии 290 м от пункта  $C$ . Даня идет в  $C$  по дороге  $B$  со скоростью 55 шагов в минуту, с длиной шага 65 см и в момент начала их совместного движения находился на расстоянии 310 м от  $C$ . Каждый из них, пройдя пункт  $C$ , не останавливаясь, продолжает движение по своей дороге. Фиксируем моменты времени, к которым Даня и Саша сделали каждый целое число шагов. Найти наименьшее возможное расстояние между ними (по дорогам) в такие моменты времени. Какое число шагов сделал каждый из них ко времени, когда это расстояние оказалось минимальным?

2. При каких  $a$  уравнение  $\sin(x-a) + \cos(x+3a) = 0$  имеет два решения  $x_1$  и  $x_2$ , для которых  $x_1 - x_2 \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$ ?

3. При каких  $u$  уравнение  $x^2 + 2y^2 + 8z^2 - 2xyz - 9 = 0$  не имеет решений при любых  $z$ ?

4. Натуральное число  $a$  имеет 109 различных делителей, включая 1 и  $a$ . Найти сумму и произведение таких делителей.

5. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  длины сторон  $BC$  и  $AD$  равны 4 и 6 соответственно. Расстояние между серединами диагоналей  $BD$  и  $AC$  равно 3. Найти угол между прямыми  $BC$  и  $AD$ .