

Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, осень 2019
9 класс

Вариант №1

1. Бригада из четырёх человек укладывает трубу длиной 50 м в землю. Для подготовки траншеи решили копать по очереди с условием: каждый копает столько времени, за которое остальные трое сообща выкопали бы три четверти траншеи. Траншея длиной 50м была выкопана, когда последний член бригады отработал положенное ему время. Сколько метров траншеи они могли бы выкопать за то же время, если бы работали все вместе?

2. Решить систему
$$\begin{cases} x^2 + 3y + z = -8 \\ x + y^2 + 5z = -12 \\ x + y + z^2 = 6 \end{cases}$$

3. Натуральное число a кратно 15 и имеет 63 различных делителей, включая единицу и a . Найдите наименьшее такое a .

4. При каких p квадратные уравнения $x^2 + (p - 1)x - (p + 2) = 0$ и $x^2 + (p + 2)x + 2p - 1 = 0$ имеют общий корень? Найти этот корень.

5. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке G . Первая окружность имеет радиус 4 и касается двух параллельных прямых. Вторая окружность имеет центр в точке O , касается одной из этих прямых, а общая касательная окружностей, проходящая через точку G , пересекает другую прямую в точке A . Прямая AO перпендикулярна параллельным прямым. Найти радиус второй окружности.

Ответы и решения

1. Предположим, что во время копки канавы одним рабочим, остальные рабочие не отдыхали, а продолжали копать траншею для следующих труб. Тогда к моменту времени, когда четвёртый рабочий закончил копку 50м, было прокопано $4 \cdot \frac{3}{4} \cdot 50 = 150\text{м}$

траншеи дополнительно. Следовательно, всей бригадой было выкопано $150\text{м}+50\text{м}=200\text{м}$.

Ответ: 200м.

2. Прибавив к первому уравнению два других, получим:

$$x^2 + 2x + y^2 + 4y + z^2 + 6z = -14$$

Далее выделим полные квадраты по каждому переменному. В результате получим:

$$(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 0$$

Следовательно, $x = -1, y = -2, z = -3$ – единственное возможное решение. Остаётся это проверить, подставив его во второе и третье уравнения системы.

Ответ: $x = -1, y = -2, z = -3$.

3. Пусть p_1, p_2, \dots, p_m – простые делители a . Среди них, по условию, есть 3 и 5, например, $p_1 = 3, p_2 = 5$. Тогда

$a = 3^{s_1} \cdot 5^{s_2} \cdot p_3^{s_3} \cdot \dots \cdot p_m^{s_m}$ и общее число его делителей равно

$$(s_1 + 1)(s_2 + 1) \cdot \dots \cdot (s_m + 1) = 63 = 7 \cdot 9, s_1 \geq 1, s_2 \geq 1, s_i \geq 0, i = 3, 4, \dots, m.$$

Тогда возможны следующие значения пар $(s_1; s_2)$:

А) $s_1 = 2, s_2 = 2$ В) $s_1 = 2, s_2 = 6$, С) $s_1 = 6, s_2 = 2$, Д) $s_1 = 2, s_2 = 20$,

Е) $s_1 = 20, s_2 = 2$.

Случай А. $s_1 = 2, s_2 = 2$ приводит к условию

$$(s_3 + 1)(s_4 + 1) \cdot \dots \cdot (s_m + 1) = 7.$$

При $p_3 < p_4 < \dots < p_m$ наименьшему значению a соответствует

$$p_3 = 2 \text{ и } s_3 = 6. \text{ Следовательно, } a_1 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2.$$

Случай В. $s_1 = 2, s_2 = 6$ приводит к условию

$$(s_3 + 1)(s_4 + 1) \cdot \dots \cdot (s_m + 1) = 3.$$

Поэтому $s_3 = 2$ и, следовательно, $a_2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^6$

Случай С. $s_1 = 6, s_2 = 2$ приводит к условию

$$(s_3 + 1)(s_4 + 1) \cdot \dots \cdot (s_m + 1) = 3.$$

Поэтому $s_3 = 2$ и, следовательно, $a_3 = 2^2 \cdot 3^6 \cdot 5^2$

Случай Д. $s_1 = 2, s_2 = 20$ приводит к условию

$$(s_3 + 1)(s_4 + 1) \cdot \dots \cdot (s_m + 1) = 1.$$

Следовательно, $s_3 = s_4 = \dots = s_m = 0$. Поэтому $a_4 = 3^2 \cdot 5^{20}$

Случай Е. $s_1 = 20, s_2 = 2$ приводит к условию

$$(s_3 + 1)(s_4 + 1) \cdot \dots \cdot (s_m + 1) = 1.$$

Следовательно, $s_3 = s_4 = \dots = s_m = 0$. Поэтому $a_5 = 3^{20} \cdot 5^2$.

Сравнивая все эти случаи, приходим к ответу

$$a_{\min} = a_1 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 14400$$

Ответ: $a_{\min} = a_1 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.

4. Из первого уравнения находим:

$$P = -\frac{x^2 - x - 2}{x - 1} = -x + \frac{2}{x - 1}, x \neq 1.$$

Из второго уравнения находим: $p = -\frac{x^2 + 2x - 1}{x + 2} = -x + \frac{1}{x + 2}, x \neq -2$.

Тогда если x —общий корень, соответствующий параметру p , то

$$-x + \frac{2}{x - 1} = -x + \frac{1}{x + 2}.$$

Откуда находим $x = -5$ и $p = \frac{14}{3}$.

Ответ: $p = \frac{14}{3}, x = -5$.

5. Введем обозначения: Q — центр первой окружности, F, E, B —

точки касания

окружностей и прямых, G — точка касания

окружностей, AD — общая

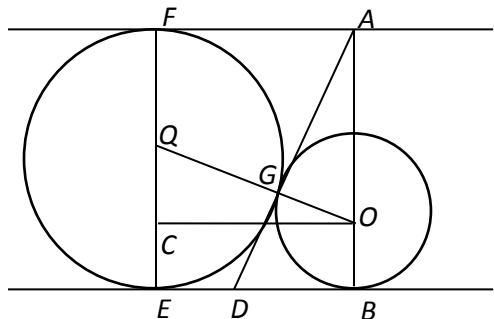
касательная (см. рисунок).

Проведём прямую OC

параллельную прямой FA .

Пусть $FA = a, OG = r$. Тогда и

$AG = a$ ($AG = FA$ как



касательные, проведённые к одной окружности из точки А). Так как $QC=4-r$, $OQ = 4 + r$, $OA = 8 - r$, $OC = a$, то из прямоугольных треугольников QOC и AOG получим систему:

$$\begin{cases} (4-r)^2 + a^2 = (4+r)^2 \\ r^2 + a^2 = (8-r)^2 \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим:

$$4 \cdot (4 - 2r) = 12 \cdot (4 - 2r).$$

Откуда следует, что $r=2$.

Ответ: $r=2$.

Вариант №2

1. Бригада из пяти человек укладывает трубу длиной 30м в землю. Для подготовки траншеи решили копать по очереди с условием: каждый копает столько времени, за которое остальные четверо сообща выкопали бы треть траншеи. Траншея длиной 30м была выкопана, когда последний член бригады отработал положенное ему время. Сколько метров траншеи они могли бы выкопать за то же время, если работали все вместе?

Ответ: 80м.

2. Решить систему
$$\begin{cases} x^2 + y - 2z = -3 \\ 3x + y + z^2 = 14 \\ 7x - y^2 + 4z = 25 \end{cases}$$

Ответ: $x=2, y=-1, z=3$.

3. Натуральное число a кратно 21 и имеет 105 различных делителей, включая единицу и a . Найти наименьшее такое a .

Ответ: $a_{\min} = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 7^2 = 254016$

4. При каких p квадратные уравнения $x^2 - (p+1)x + (p+1) = 0$ и $2x^2 + (p-2)x - p - 7 = 0$ имеют общий корень? Найти этот корень.

Ответ: 1) $p=3, x=2$; 2) $p=-\frac{3}{2}, x=-1$.

5. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке G . Первая окружность имеет радиус 6 и касается двух параллельных прямых. Вторая окружность имеет центр в точке O , касается одной из этих прямых, а общая касательная окружностей, проходящая через точку G , пересекает другую прямую в точке A . Прямая AO перпендикулярна параллельным прямым. Найти радиус второй окружности.

Ответ: $r=3$.

Вариант №3

1. Бригада из шести человек укладывает трубу длиной 40м в землю. Для подготовки траншеи решили копать по очереди с условием: каждый копает столько времени, за которое остальные пять сообща выкопали бы четверть траншеи. Траншея длиной 40м была выкопана, когда последний член бригады отработал положенное ему время. Сколько метров траншеи они могли бы выкопать за то же время, если работали все вместе?

Ответ: 100м.

2. Решить систему
$$\begin{cases} x^2 - 3y + z = -4 \\ x - 3y + z^2 = -10 \\ 3x + y^2 - 3z = 0 \end{cases}$$

Ответ: $x=-2, y=3, z=1$.

3. Натуральное число a кратно 35 и имеет 75 различных делителей, включая единицу и a . Найти наименьшее такое a .

Ответ: $a_{min} = 2^4 \cdot 5^4 \cdot 7^2 = 490000$.

4. При каких p квадратные уравнения

$9x^2 - 3(p+6)x + 6p + 5 = 0$ и $6x^2 - 3(p+4)x + 6p + 14 = 0$ имеют общий корень? Найти этот корень.

Ответ: 1) $p = -\frac{32}{9}, x = -1$; 2) $p = \frac{32}{3}, x = 3$.

5. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке G . Первая окружность имеет радиус 8 и касается двух параллельных прямых. Вторая окружность имеет центр в точке O , касается одной из этих прямых, а общая касательная окружностей, проходящая через точку G , пересекает другую прямую в точке A . Прямая AO перпендикулярна параллельным прямым. Найти радиус второй окружности.

Ответ: $r=4$.

Вариант №4

1. Бригада из семи человек укладывает трубу длиной 60м в землю. Для подготовки траншеи решили копать по очереди с условием: каждый копает столько времени, за которое остальные шесть сообща выкопали бы шестую часть траншеи. Траншея длиной 60м была выкопана, когда последний член бригады отработал положенное ему время. Сколько метров траншеи они могли бы выкопать за то же время, если работали все вместе?

Ответ: 130м.

2. Решить систему
$$\begin{cases} x^2 - y - z = 8 \\ 4x + y^2 + 3z = -11 \\ 2x - 3y + z^2 = -11 \end{cases}$$

Ответ: $x = -3, y = 2, z = -1$.

3. Натуральное число a кратно 55 и имеет 117 различных делителей, включая единицу и a . Найти наименьшее такое a .

Ответ: $a_{\min} = 2^{12} \cdot 5^2 \cdot 11^2 = 12390400$.

4. При каких p квадратные уравнения $x^2 - (p+2)x + 2p + 6 = 0$ и $2x^2 - (p+4)x + 2p + 3 = 0$ имеют общий корень? Найти этот корень.

Ответ: 1) $p = -3, x = -1$; 2) $p = 9, x = 3$

5. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке G . Первая окружность имеет радиус 2 и касается двух

параллельных прямых. Вторая окружность имеет центр в точке O , касается одной из этих прямых, а общая касательная окружностей, проходящая через точку G , пересекает другую прямую в точке A . Прямая AO перпендикулярна параллельным прямым. Найти радиус второй окружности.

Ответ: $r=1$.