Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, Россия, март 2020

Вариант № 1

1. Найти целые числа x и y, для которых

$$\log_2\left(\frac{x}{17}+\frac{y}{5}\right)=\log_2\frac{x}{17}+\log_2\frac{y}{5}.$$

2. При каких целых n функция $f(x)=\sin(nx)\cdot\cos\frac{6x}{n+1}$ имеет период $T=5\pi$?

3. Доказать, что существует набор натуральных чисел $a_1, a_2, ...,$ a_{2019}, для которых $2\cdot НОК(a_1,a_2,...,a_{2019})=a_1+a_2+...+a_{2019}$.

4. Саша и Маша задают друг другу по пять каверзных вопросов и отвечают на них, не задумываясь, случайным образом. Вероятность того, что на заданный Машей вопрос Саша скажет неправду, не зависит от номера вопроса и равна $\frac{1}{2}$. Маша на вопрос Саши дает правдивый ответ с вероятностью $\frac{2}{3}$ независимо от порядка вопроса. После окончания диалога выяснилось, что Маша дала на два правдивых ответа больше, чем Саша. С какой вероятностью это могло произойти?

5. Арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ с ненулевой разностью такова, что последовательность $b_n=a_n\cdot\sin a_n$ также арифметическая прогрессия с ненулевой разностью. Найти возможные значения первого члена и разности прогрессии $\{a_n\}$, если для всех n справедливо равенство $2\cos^2 a_n=\cos a_{n+1}$.

6. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC вовне построены два равных прямоугольника $AMNB$ и $APQC$. Найти расстояние между вершинами N и Q прямоугольников, если длины сторон AB и AC равны 3 и 4 соответственно, а угол при вершине A треугольника равен 30^0.

Ответы и решения

1. Перепишем исходное уравнение

$$\log_2\left(\frac{x}{17}+\frac{y}{5}\right)=\log_2\frac{x}{17}+\log_2\frac{y}{5}$$

в виде

$$\log_2\left(\frac{x}{17}+\frac{y}{5}\right)=\log_2\frac{xy}{85}.$$

Отсюда получаем $\frac{x}{17}+\frac{y}{5}=\frac{xy}{85}$ или $5x+17y=xy$. Последнее уравнение перепишем в виде

$$(x-17)(y-5)=85.$$

Рассматриваем возможные варианты

x–17	1	5	17	85	−1	−5	−17	−85
y–5	85	17	5	1	−85	−17	−5	−1
x	18	22	34	102	16	12	0	−68
y	90	22	10	6	−80	−12	0	4

Отбирая натуральные решения, получаем ответ.

Ответ: $\begin{cases}x=18,\\ y=90;\end{cases}$ $\begin{cases}x=22,\\ y=22;\end{cases}$ $\begin{cases}x=34,\\ y=10;\end{cases}$ $\begin{cases}x=102,\\ y=6.\end{cases}$

2. При всех x должно выполнять равенство

$$f(x+5\pi)=f(x),\text{ т.е.}$$

$$\sin(nx+5\pi n)\cos\frac{6(x+5\pi)}{n+1}=\sin nx\cos\frac{6x}{n+1}.$$

При n=0 это равенство выполнено и поэтому в дальнейшем анализе мы можем не обращать внимание на это значение.

Случай 1.nчетное. Равенство принимает вид

$$\sin nx \cos\frac{6(x+5\pi)}{n+1} - \sin nx \cos\frac{6x}{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\sin nx\left(\cos\frac{6x}{n+1} - \cos\frac{6x+30\pi)}{n+1}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\sin nx \cdot \sin\frac{6x+15\pi}{n+1} \cdot \sin\frac{15\pi}{n+1} = 0.$$

Рассмотрим нули первых двух функций, входящих в полученное произведение

$$\sin nx = 0 \;\Leftrightarrow\; nx = \pi k (k\in Z) \;\Rightarrow\; \frac{x}{\pi} = \frac{k}{n};$$

$$\sin\frac{6x+15\pi}{n+1} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{6x+15\pi}{n+1} = \pi m (m\in Z) \;\Rightarrow\; \frac{x}{\pi} = \frac{m(n+1)-15}{6}.$$

Для них отношение x/πрационально. Отсюда следует, что существует значение x , для которого
рассматриваемые функции не обращаются в ноль (достаточно взять x=πy, где y является иррациональным числом). Следовательно, условие задачи равносильно равенству

$$\sin\frac{15\pi}{n+1} = 0.$$

Отсюда находим $\dfrac{15\pi}{n+1} = \pi m,\ m\in Z$ или $\dfrac{15}{n+1} = m,\ m\in Z,$ и, поэтому n+1 должно быть нечетным делителем числа 15, т.е. $n+1\in\{1,-1,3,-3,5,-5,15,-15\}$ или $n\in\{0,-2,2,-4,4,-6,14,-16\}$.

Случай 2. nнечетное. Равенство принимает вид

$$-\sin nx\cos\frac{6(x+5\pi)}{n+1}-\sin nx\cos\frac{6x}{n+1}\Leftrightarrow$$

$$\sin nx\left(\cos\frac{6x}{n+1}+\cos\frac{6x+30\pi)}{n+1}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$2\sin nx\cdot\cos\frac{6x+15\pi}{n+1}\cdot\cos\frac{15\pi}{n+1}=0.$$

Аналогично предыдущему пункту нетрудно видеть, что если отношение x/πиррационально, то значение x не является нулем первых двух функций, входящих в произведение в левой части последнего равенства. Таким образом, это равенство равносильно соотношению

$$\cos\frac{15\pi}{n+1}=0.$$

Отсюда находим

$$\frac{15\pi}{n+1}=\frac{\pi(2m+1)}{2},\ m\in Z,\ \text{или}\ \frac{30}{n+1}=2m+1,\ m\in Z.$$

Следовательно, $n+1\in\{2,-2,6,-6,10,-10,30,-30\}$, а $n\in\{1,-3,5,-7,9,-11,29,-31\}$.

Объединяя найденные значения, получаем ответ.

Ответ:

$$n\in\{-31;-16;-11;-7;-6;-4;-3;-2;0;1;2;4;5;9;14;29\}.$$

3. Пусть $a_1=a_2=...=a_{2018}=1,\ a_{2019}=2018.$ Покажем, что этот набор удовлетворяет условию задачи

$a_1+a_2+...+a_{2018}+a_{2019}=(1+1+...+1)+2018=2018+2018=2\cdot 2018.$

Ответ: $a_1=a_2=...=a_{2018}=1,\ a_{2019}=2018.$

4. Число правильных ответов Саши распределено по биномиальному закону с вероятностью успеха 1/2

$$P_1(k)=C_5^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{5-k}=\frac{C_5^k}{32}.$$

k	0	1	2	3	4	5

$P_1(k)$	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

Число правильных ответов Маши распределено по биномиальному закону с вероятностью успеха 2/3

$$P_2(k) = C_5^k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{5-k} = \frac{2^k C_5^k}{243}.$$

k	0	1	2	3	4	5
$P_2(k)$	1/243	10/243	40/243	80/243	80/243	32/243

Совместное распределение вероятностей определяется произведением одномерных распределений

$$P(k,m) = P_1(k)P_2(m).$$

В задаче требуется определить вероятность объединения событий, отвечающих значениям k=0,m=2; k=1,m=3; k=2,m=4 и k=3,m=5. Искомая вероятность

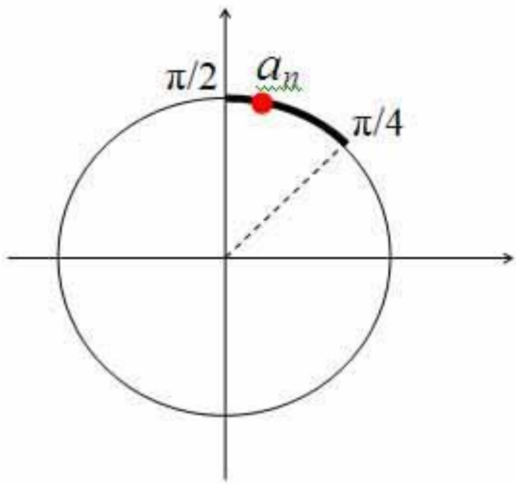
$$p = P(0,2) + P(1,3) + P(2,4) + P(3,5) =$$

$$= \frac{1}{32}\cdot\frac{40}{243} + \frac{5}{32}\cdot\frac{80}{243} + \frac{10}{32}\cdot\frac{80}{243} + \frac{10}{32}\cdot\frac{32}{243} =$$

$$= \frac{40+400+800+320}{32\cdot 243} = \frac{1560}{32\cdot 243} = \frac{3\cdot 8\cdot 65}{4\cdot 8\cdot 3\cdot 81} = \frac{65}{324}.$$

Ответ: $\frac{65}{324}$.

5. Из уравнения $2\cos^2 a_n = \cos a_{n+1}$ следует, что при всех nзначение $\cos a_{n+1} \geq 0$ и $|\cos a_n| = \sqrt{\frac{\cos a_{n+1}}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, т.е. на тригонометрическом круге все значения a_n попадают на участок [π/4;π/2].



Из того, что числа a_nобразуют арифметическую прогрессию, следует тот факт, что разность d этой прогрессии должна быть кратна длине окружности 2π. В самом деле, если величина d больше ближайшего числа кратного 2π к числу a_n , то один из последующих членов последовательности, располагаясь на единичной окружности против часовой стрелки от a_n и смещаясь от него на постоянное значение вдоль дуги, выйдет за участок дуги [π/4;π/2]. Аналогично, если величина d меньше ближайшего числа кратного 2π к числу a_n , то один из последующих членов последовательности, располагаясь на единичной окружности почасовой стрелки от a_n и смещаясь от него на постоянное значение вдоль дуги, также выйдет за участок дуги [π/4;π/2]. Таким образом,

$$d = 2\pi k,\ k \in Z.$$

При этом $k\neq 0$ так как по условию задачи $d\neq 0$.

Из доказанного утверждения следует, что при всех n

$$\cos a_n = \cos(a_1 + (n-1)d) = \cos(a_1 + (n-1)\cdot 2\pi k) = \cos a_1.$$

Это обстоятельство дает уравнение для определения первого члена прогрессии

$$2\cos^2 a_1 = \cos a_1.$$

Решая уравнение, находим

$$\left[\begin{array}{l}\cos a_1 = 0 \\ \cos a_1 = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a_1 = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in Z, \\ a_1 = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z.\end{array}\right.$$

Первая серия дает

$$a_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi m + (n-1)2\pi k \ \Rightarrow\ b_n = a_n,$$

а две оставшиеся

$$a_n = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m + (n-1)2\pi k \ \Rightarrow\ b_n = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}a_n.$$

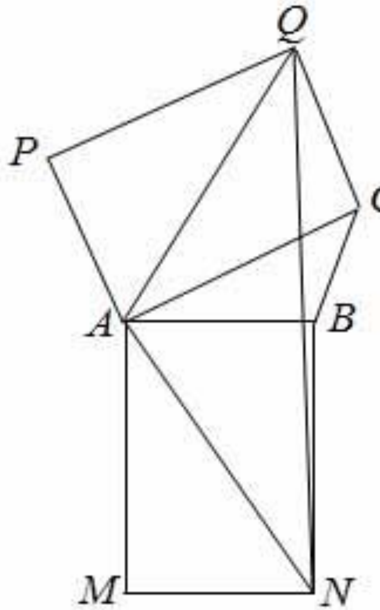
Все серии удовлетворяют условиям задачи.

$$1)\ a_1 = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z;\ d = 2\pi k,\ k \in Z,\ k \neq 0;$$

Ответ: $$2)\ a_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z;\ d = 2\pi k,\ k \in Z,\ k \neq 0;$$

$$3)\ a_1 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z;\ d = 2\pi k,\ k \in Z,\ k \neq 0.$$

6. Рассмотрим чертеж



По условию AC=4, а так как AB=3, то также и QC=3. По теореме Пифагора для треугольника ACQ получаем, что AQ=5. Прямоугольники $APQC$ и $AMNB$ равны, следовательно, AN также равно 5. Из равенства прямоугольных треугольников AQC и ABN следует, что сумма углов QAB и BAN равна 90 градусов. По условию задачи угол CAB равен 30 градусов. Следовательно, угол QAN равен сумме 30+90=120 градусов. По теореме косинусов для треугольника QAN

$$NQ = \sqrt{AQ^2 + AN^2 - 2 \cdot AQ \cdot AN \cos(QAN)} =$$

$$= \sqrt{25 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot (-1/2)} = \sqrt{25 + 25 + 25} = 5\sqrt{3}$$

Ответ: $5\sqrt{3}$.

Вариант № 2

1. Найти целые числа x и нечетные y, для которых

$$\log_2\left(\frac{x}{6}+\frac{y}{14}\right)=\log_2\frac{x}{6}+\log_2\frac{y}{14}.$$

Ответ: $\begin{cases}x=10,\\ y=35;\end{cases}$ $\begin{cases}x=18,\\ y=21;\end{cases}$ $\begin{cases}x=34,\\ y=17;\end{cases}$ $\begin{cases}x=90,\\ y=15.\end{cases}$

2. При каких целых n функция $f(x)=\cos((n+1)x)\cdot\sin\dfrac{8x}{n-2}$ имеет период $T=3\pi$?

Ответ: $n\in\{3;1;5,-1;10;-6;26;-22\}$.

3. Доказать, что существует набор натуральных чисел $a_1, a_2, ...,$ a_{2020}, для которых $3\cdot НОК(a_1,a_2,...,a_{2020})=2(a_1+a_2+...+a_{2020})$.

Ответ: подходит, например, $a_1=a_2=...=a_{2019}=1,\ a_{2020}=4038.$

4. Коля и Толя задают друг другу по четыре каверзных вопросов и отвечают на них, не задумываясь, случайным образом. Вероятность того, что на заданный Толей вопрос Коля скажет неправду, не зависит от номера вопроса и равна $\frac{1}{3}$. Толя на вопрос Коли дает правдивый ответ с вероятностью $\frac{1}{4}$ независимо от порядка вопроса. После окончания диалога выяснилось, что Коля дал на три правдивых ответа больше, чем Толя. С какой вероятностью это могло произойти?

Ответ: $\frac{5}{24}$.

5. Арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ с ненулевой разностью такова, что последовательность $b_n=a_n\cdot\cos a_n$ также арифметическая прогрессия с ненулевой разностью. Найти возможные значения первого члена и разности прогрессии $\{a_n\}$, если для всех n справедливо равенство $\sin 2a_n+\cos a_{n+1}=0$.

Ответ:
$$1)\ a_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in Z;\ d = 2\pi k,\ k \in Z,\ k \neq 0;$$
$$2)\ a_1 = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in Z;\ d = 2\pi k,\ k \in Z,\ k \neq 0.$$

6. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC вовне построены два равных прямоугольника $AMNB$ и $APQC$. Найти расстояние между вершинами N и Q прямоугольников, если длины сторон AB и AC равны $\sqrt{3}$ и 1 соответственно, а угол при вершине A треугольника равен 60^0.

Ответ: $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Вариант № 3

1. Найти целые числа y и четные x, для которых

$$\log_2\left(\frac{x}{7}+\frac{y}{6}\right) = \log_2\frac{x}{7} + \log_2\frac{y}{6}.$$

Ответ: $\begin{cases} x=8, \\ y=48; \end{cases}$ $\begin{cases} x=10, \\ y=20; \end{cases}$ $\begin{cases} x=14, \\ y=12; \end{cases}$ $\begin{cases} x=28, \\ y=8. \end{cases}$

2. При каких целых n функция $f(x) = \sin((2n+1)x)\cdot\sin\dfrac{5x}{n-1}$ имеет период $T = 7\pi$?

Ответ: $n \in \{2; 0; 6, -4; 8; -6; 36; -34\}$.

3. Доказать, что существует набор натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots,$ a_{2021}, для которых $4\cdot НОК(a_1, a_2, \ldots, a_{2021}) = 3\cdot(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2021})$.

Ответ: подходит, например, $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2020} = 1,\quad a_{2021} = 6060.$

4. Катя и Паша задают друг другу по четыре каверзных вопроса и отвечают на них, не задумываясь, случайным образом. Вероятность того, что на заданный Пашей вопрос Катя скажет неправду, не зависит от номера вопроса и равна $\frac{1}{3}$. Паша на вопрос Кати дает правдивый ответ с вероятностью $\frac{3}{5}$ независимо от порядка вопроса. После окончания диалога выяснилось, что Паша дал на два правдивых ответа больше, чем Катя. С какой вероятностью это могло произойти?

Ответ: $\frac{48}{625}$.

5. Арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ с ненулевой разностью такова, что последовательность $b_n = a_n \cdot tg a_n$ также арифметическая прогрессия. Найти возможные значения первого члена и разности прогрессии $\{a_n\}$, если для всех n справедливо равенство $\sin a_n + \sin a_{n+2} = 1$.

Ответ:
$$1)\ a_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in Z;\ d = 2\pi k,\ k \in Z,\ k \neq 0;$$
$$2)\ a_1 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in Z;\ d = 2\pi k,\ k \in Z,\ k \neq 0.$$

6. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC вовне построены два равных прямоугольника $AMNB$ и $APQC$. Найти расстояние между вершинами N и Q прямоугольников, если длины сторон AB и AC равны $2\sqrt{2}$ и 1, соответственно, а угол при вершине A треугольника равен 45^0.

Ответ: $3\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Вариант № 4

1. Найти целые числа x и y такие, что $x + y$ – четное и

$$\log_2\left(\frac{x}{5}+\frac{y}{8}\right)=\log_2\frac{x}{5}+\log_2\frac{y}{8}.$$

Ответ: $\begin{cases} x=6, \\ y=48; \end{cases}$ $\begin{cases} x=10, \\ y=16; \end{cases}$ $\begin{cases} x=13, \\ y=13; \end{cases}$ $\begin{cases} x=45, \\ y=9. \end{cases}$

2. При каких целых n функция $f(x)=\cos((n-1)x)\cdot\cos\dfrac{15x}{2n+1}$ имеет период $T=\pi$?

Ответ: $n\in\{0;-2;2;-8\}$.

3. Доказать, что существует набор натуральных чисел $a_1, a_2, ...,$ a_{2022}, для которых $5\cdot НОК(a_1, a_2, ..., a_{2022})=4\cdot(a_1+a_2+...+a_{2022})$.

Ответ: подходит, например, $a_1=a_2=...=a_{2021}=1,\ \ a_{2022}=8084.$

4. Аня и Боря задают друг другу по три каверзных вопроса и отвечают на них, не задумываясь, случайным образом. Вероятность того, что на заданный Борей вопрос Аня скажет неправду, не зависит от номера вопроса и равна $\dfrac{1}{4}$. Боря на вопрос Ани дает правдивый ответ с вероятностью $\dfrac{2}{5}$ независимо от порядка вопроса. После окончания диалога выяснилось, что Боря дал на один правдивый ответ больше, чем Аня. С какой вероятностью это могло произойти?

Ответ: $\dfrac{297}{4000}$.

5. Арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ с ненулевой разностью такова, что последовательность $b_n=a_n\cdot ctga_n$ также арифметическая прогрессия. Найти возможные значения первого члена и разности прогрессии $\{a_n\}$, если для всех n справедливо равенство $\cos a_n+\cos 3a_{n+1}=0$.

Ответ:

1) $a_1 = \dfrac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z;\ d = \pi k,\ k \in Z,\ k \neq 0;$

2) $a_1 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi m}{2},\ m \in Z;\ d = 2\pi k,\ k \in Z,\ k \neq 0.$

6. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC во вне построены два равных прямоугольника $AMNB$ и $APQC$. Найти расстояние между вершинами N и Q прямоугольников, если длины сторон AB и AC равны 5 и $\sqrt{11}$, соответственно, а угол при вершине A треугольника равен $\arccos\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $\sqrt{72 + 48\sqrt{2}}$.

Заключительный тур олимпиады «Росатом»,
11 класс, СНГ, февраль 2020

Вариант № 1

1. Сколько существует натуральных чисел $n \le 2020$, для которых дробь $\dfrac{6n^3+n^2-5n+12}{6n^2+7n+2}$ сократимая?

2. Решить уравнение $\sin\left(x\left(\eta(x)-\eta(x-7\pi)\right)\right)=1+\cos x$, где $\eta(x)=\begin{cases}1, x\ge 0\\ 0, x<0\end{cases}$ – функция Хэвисайда.

3. Доказать, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами выражение $P(b)-P(a)$ делится на $\left(b-a\right)$ при любых целых $a,b,a\ne b$. Известно, что уравнение $P(x)=8$ имеет целый корень на полуоси $x\ge 8$ и $P(4)=17$. Найти этот корень.

4. Петя, Вася и Иван каждый на своей карточке написал наугад по одной цифре и передали карточки Маше так, чтобы она не видела написанных цифр. Маша случайным образом перемешала карточки и выложила их в ряд на стол. Найти вероятность того, что на столе можно увидеть трехзначное число кратное 5, имеющее при делении на 7 остаток 3.

5. Найти наименьшее положительное значение выражения $x+y$ для всех пар чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению $(\sin x+\cos y)(\cos x-\sin y)=1+\sin(x-y)\cos(x+y)$.

6. Точка M – середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. Прямая CM наклонена к основанию AD под углом 30^0. Вершина B равноудалена от прямой CM и вершины A. Найти углы параллелограмма. Найти площадь параллелограмма, если длина основания AD равна 2.

Ответы и решения

1. Разделим числитель дроби на знаменатель «уголком»:

$$6n^3+n^2-5n+12=(n-1)(6n^2+7n+2)+14.$$

Знаменатель дроби раскладывается на множители:

$$6n^2+7n+2=(2n+1)(3n+2)$$

Если числитель и знаменатель дроби делится на $p>1$, то p является делителем 14, т.е. $p=2,7,14$.

Случай 1. $p=2.$ Первый множитель знаменателя $(2n+1)$ на 2 не делится, второй множитель знаменателя $3n+2$ делится на 2 при четных n. е На отрезке $\left[1,2020\right]$ таких чисел 1010.

Случай 2. $p=7.$ Найдем n, при которых хотя бы один из множителей знаменателя кратен 7:

$$\left[\begin{array}{l}2n+1=7m\\3n+2=7k\end{array}\right.\rightarrow\left[\begin{array}{l}7m-2n=1\rightarrow\begin{cases}m=1+2s,\\n=3+7s\quad(*),s\in Z,\end{cases}\\[2ex]7k-3n=2\rightarrow\begin{cases}k=2+3t,\\n=4+7t\quad(**),t\in Z.\end{cases}\end{array}\right.$$

Нечетных $n\le 2020$ вида $n=14t+3$, удовлетворяющих (*), 145. Нечетных n, удовлетворяющих (**), – 144 (серии (*) и (**) не пересекаются).

Случай 3. $p=14.$ Первый множитель знаменателя нечетный, поэтому на 14 не делится. Второй делится на 14, если $3n+2=14m,$ но это бывает только при четных n, а они уже учтены. Наконец, если первый множитель знаменателя делится на 7, а второй на 2:

$$\begin{cases}2n+1=7k\\3n+2=2s\end{cases},$$

то n может быть только четным, а такие n уже учтены. Таким образом, искомое число допустимых n равно

$$1010+145+144=1299.$$

Ответ: 1299 чисел.

2. Выражение $\eta(x)-\eta(x-7\pi)=\begin{cases}1, x\in[0,7\pi),\\ 0, x\in(-\infty;0)\cup[7;+\infty).\end{cases}$

Случай 1. $x\in[0,7\pi)$. Уравнение принимает вид

$$\sin x = 1+\cos x.$$

Применяя метод введения вспомогательного аргумента, получим

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Решим это уравнение

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z,\\ x=\pi+2\pi m, m\in Z.\end{array}\right.$$

С учетом $x\in[0,7\pi)$, имеем

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k=0,1,2,3,\\ x=\pi+2\pi m, m=0,1,2.\end{array}\right.$$

Случай 2. $x\in(-\infty;0)\cup[7;+\infty)$. Уравнение принимает вид

$$1+\cos x=0.$$

Решим это уравнение

$$x=\pi+2\pi m, m\in Z.$$

С учетом $x\in(-\infty;0)\cup[7;+\infty)$, имеем

$$x=\pi+2\pi m, m=-1,-2,-3,\ldots,3,4,\ldots$$

Объединяя решения, полученные в рассмотренных выше случаях, решения, находим $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k=0,1,2,3,$ $x=\pi(2m+1), m\in Z.$

Ответ: 1) $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k=0,1,2,3;$ 2) $x=\pi(2m+1), m\in Z.$

3. Для доказательства утверждения запишем общий вид многочлена $P(x)$ степени n

$$P(x)=c_n x^n+c_{n-1}x^{n-1}+...+c_1 x+c_0,\; c_k\in Z, k=0,1,...,n, c_n\neq 0.$$

Рассмотрим

$$P(b)-P(a)=c_n(b^n-a^n)+c_{n-1}(b^{n-1}-a^{n-1})+...+c_1(b-a).$$

Используя известную формулу

$$b^k-a^k=(b-a)\cdot\left(b^{k-1}+b^{k-2}a+\ldots+a^{k-1}\right),$$

получим

$$P(b)-P(a)=(b-a)\cdot Q_{n-1}(a,b),$$

где $Q_{n-1}(a,b)$ – многочлен степени $(n-1)$ переменных a,b с целыми коэффициентами. Следовательно, выражение $P(b)-P(a)$ делится на $\left(b-a\right)$ при любых целых $a,b,a\neq b$.

Рассмотрим вторую часть задачи. Если x решение уравнения $P(x)=8$, а $P(4)=17,$ то $P(x)-P(4)=-9$. По доказанному выше, $P(x)-P(4)$ делится на $x-4$, следовательно, выражение $x-4$ является делителем числа т.е. $x-4=\pm1,\pm3,\pm9.$ Отсюда находим $x=-5,1,3,5,7,13.$ Ограничению $x\geq 8$ удовлетворяет единственное $x=13$.

Ответ: $x=13.$

4. Посчитаем количество вариантов написать 3 цифры:

$$10\cdot 10\cdot 10=1000.$$

Получим формулу для числа A, кратного 5 и имеющего при делении на 7 остаток 3. Это число имеет вид

$$A=5k=7n+3.$$

Решая уравнение $5k-7n=3$ в целых числах, находим

$$\begin{cases} k=7t+2, \\ n=5t+1. \end{cases}$$

Следовательно, $A=35t+10,\; t\in Z,\; t\geq 0.$ Так как по условию задачи A это трехзначное число, то $100\leq 35t+10\leq 999.$ Отсюда, с учетом целочисленности $t,$ получаем $t=2,3,\ldots,28.$ Это означает, что количество трехзначных чисел, удовлетворяющих условию задачи, равно 26. Следовательно, вероятность того, что на столе можно увидеть трехзначное число кратное 5, имеющее при делении на 7 остаток 3, равна $\dfrac{26}{1000}$.

Ответ: $P = 0,026.$

5. Преобразуем левую часть уравнения

$$(\sin x + \cos y)(\cos x - \sin y) =$$

$$= \sin x \cos x + \cos y \cos x - \sin x \sin y - \cos y \sin y =$$

$$= \cos(x+y) + \frac{1}{2}\left(\sin 2x - \sin 2y\right) = \cos(x+y) + \sin(x-y)\cos(x+y).$$

Подставим полученное выражение в исходное уравнение

$$\cos(x+y) + \sin(x-y)\cos(x+y) = 1 + \sin(x-y)\cos(x+y).$$

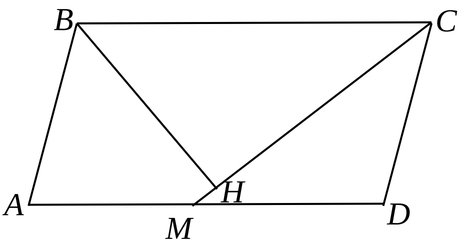
Отсюда получаем $\cos(x+y) = 1.$ Решая это уравнение, находим

$$x + y = 2\pi k, k \in Z.$$

Следовательно, наименьшим, положительным значением для $x+y$ является 2π .

Ответ: $\left(x+y\right)_{\min} = 2\pi.$

6. Обозначим длину стороны AB параллелограмма $ABCD$ через a. Опустим из вершины B перпендикуляр BH на прямую CM. Рассмотрим прямоугольный треугольник BHC. По



условию задачи $BH = AB = a.$ Так как $BC \parallel AB,$ то $\angle BCH = \angle CMD = 30^\circ$. Отсюда следует, что $BC = 2BH = 2a.$ Теперь рассмотрим треугольник $MDC.$ Так как

$MD=\dfrac{AD}{2}=\dfrac{BC}{2}=a,\;\; CD=AB=a,$ то этот треугольник равнобедренный. Следовательно, $\angle MCD=\angle CMD=30^{\circ}$. Тогда

$$\angle CDA=180^{\circ}-2\cdot 30^{\circ}=120^{\circ},$$

а

$$\angle BAD=180^{\circ}-\angle CAD=180^{\circ}-120^{\circ}=60^{\circ}.$$

Вычислим площадь параллелограмма $ABCl$ при условии, что $AD=2$:

$$S_{ABCD}=AD\cdot BC\sin 120^{0}=2\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}.$$

Ответ: 1) $60^{0},\; 120^{0}$; 2) $S_{ABCD}=\sqrt{3}.$

Вариант № 2

1. Сколько существует натуральных чисел $n\le 2024$, для которых дробь $\dfrac{15n^{3}+11n^{2}-8n+2}{15n^{2}-4n-4}$ несократимая?

Ответ: 675 чисел.

2. Решить уравнение

$$\cos\left(2x\left(\eta(x+3\pi)-\eta(x-8\pi)\right)\right)=\sin x+\cos x,$$

где $\eta(x)=\begin{cases}1, x\ge 0\\ 0, x<0\end{cases}$ – функция Хэвисайда.

Ответ: 1) $x=2\pi k, k\in Z;$ 2) $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\;\; k=-1,0,1,2,3,4.$

3) $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z, k\ne -1,0,1,2,3;$

4) $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi m, m=-2,-1,...,8.$

3. Доказать, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами выражение $P(b)-P(a)$ делится на $(b-a)$ при любых целых $a, b, a \neq b$. Известно, что уравнение $P(x) = 15$ имеет целый корень на полуоси $x \leq -2$ и $P(3) = 7$. Найти этот корень.

Ответ: $x = -5$.

4. Петя, Вася и Иван каждый на своей карточке написал наугад по одной цифре и передали карточки Маше так, чтобы она не видела написанных цифр. Маша случайным образом перемешала карточки и выложила их в ряд на стол. Найти вероятность того, что на столе можно увидеть трехзначное число кратное 3, имеющее при делении на 8 остаток 5.

Ответ: $P = 0,037$.

5. Найти наибольшее отрицательное значение выражения $x - y$ для всех пар чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$(\sin x + \sin y)(\cos x - \cos y) = \frac{1}{2} + \sin(x - y)\cos(x + y).$$

Ответ: $\left(x + y\right)_{\max} = -\dfrac{\pi}{6}$.

6. Точка M – середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. Прямая CM наклонена к основанию AD под углом 45^0. Вершина B равноудалена от прямой CM и вершины A. Найти углы параллелограмма. Найти площадь параллелограмма, если длина основания AD равна 1.

Ответ: 1) 75^0, 105^0; 2) $S_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{4}$.

Вариант № 3

1. Сколько существует натуральных чисел $n \leq 1947$, для которых дробь $\dfrac{15n^3 + 17n^2 + n + 14}{15n^2 + 2n - 1}$ сократимая?

Ответ: 908 чисел.

2. Решить уравнение $tg\left(x\left(\eta(x-2\pi)-\eta(x-5\pi)\right)\right)=\frac{1}{\cos^2 x}-1,$

где $\eta(x)=\begin{cases}1, x\geq 0\\ 0, x<0\end{cases}$ – функция Хэвисайда.

Ответ:: 1) $x=\pi k, k\in Z;$ 2) $x=\frac{\pi}{4}+\pi m, m=2,3,4.$

3. Доказать, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами выражение $P(b)-P(a)$ делится на $(b-a)$ при любых целых $a,b,a\neq b$. Известно, что уравнение $P(x)=-9$ имеет целый корень на полуоси $x>12$ и $P(5)=-23$. Найти этот корень.

Ответ: $x=19.$

4. Петя, Вася и Иван каждый на своей карточке написал наугад по одной цифре и передали карточки Маше так, чтобы она не видела написанных цифр. Маша случайным образом перемешала карточки и выложила их в ряд на стол. Найти вероятность того, что на столе можно увидеть трехзначное число кратное 4, имеющее при делении на 5 остаток 2.

Ответ: $P=0,045.$

5. Найти наименьшее положительное значение выражения $x+y$ для всех пар чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению $(tgx-2)(tgy-2)=5$.

Ответ: $(x+y)_{\min}=\pi-arctg\frac{1}{2}.$

6. Точка M – середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. Прямая CM наклонена к основанию AD под углом 15^0. Вершина B равноудалена от прямой CM и вершины A. Найти углы параллелограмма. Найти площадь параллелограмма, если длина основания AD равна 6.

Ответ: 1) 45^0, 135^0; 2) $S_{ABCD}=9(\sqrt{3}-1).$

Вариант № 4

1. Сколько существует натуральных чисел $n \le 1998$, для которых дробь $\dfrac{21n^3+50n^2+39n+31}{21n^2+29n+10}$ несократимая?

Ответ: 1142 чисел.

2. Решить уравнение

$$ctg\left(2x\left(\eta(x+3\pi)-\eta(x-6\pi)\right)\right)=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x},$$

где $\eta(x)=\begin{cases}1, x\ge 0\\ 0, x<0\end{cases}$ – функция Хэвисайда.

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k=-3,-2,\ldots,5.$

3. Доказать, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами выражение $P(b)-P(a)$ делится на $(b-a)$ при любых целых $a,b,a\ne b$. Известно, что уравнение $P(x)=13$ имеет целый корень на полуоси $x\le -4$ и $P(-2)=2$. Найти этот корень.

Ответ: $x=-13.$

4. Петя, Вася и Иван каждый на своей карточке написал наугад по одной цифре и передали карточки Маше так, чтобы она не видела написанных цифр. Маша случайным образом перемешала карточки и выложила их в ряд на стол. Найти вероятность того, что на столе можно увидеть трехзначное число кратное 7, имеющее при делении на 3 остаток 1.

Ответ: $P=0,043.$

5. Найти наибольшее отрицательное значение выражения $x-y$ для всех пар чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению $(1-ctgx)(1+ctgy)=2$.

Ответ: $(x+y)_{\max}=-\dfrac{3\pi}{4}.$

6. Точка M – середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. Прямая CM наклонена к основанию AD под углом 75^0. Вершина B равноудалена от прямой CM и вершины A. Найти углы параллелограмма. Найти площадь параллелограмма, если длина основания AD равна 4.

Ответ: 1) 75^0, 105^0; 2) $S_{ABCD} = 4(\sqrt{3}+2)$.

Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, Москва, март 2020

Вариант № 1

1. В бассейне, на соседних дорожках тренируются два пловца Петя и Костя. Петя проплывает дорожку 50 м за две минуты, Костя – за три. Вначале тренировки оба находились на линии старта у края дорожки, спустя 60 мин тренировка закончилась. Сколько раз за это время, включая начало, они находились на одинаковом расстоянии от линии старта?

2. При каких значениях a точка с координатами $(\sin a; \sin 3a)$ симметрична точке с координатами $(\cos a; \cos 3a)$ относительно прямой с уравнением $x + y = 0$.

3. Поверхность коробки размером $3 \times 4 \times 5$ разбита на 94 квадрата размером 1×1. В квадратах, принадлежащих одной грани, написаны одинаковые натуральные числа. На параллельной ей грани коробки эти числа повторяются (на каждой паре параллельных граней числа, вообще говоря, разные). Муравей Гоша совершает путешествия по поверхности коробки, соблюдая следующие правила: 1) маршрут начинается в центре любого из указанных квадратов, заканчивается в нем же и представляет собой замкнутую ломаную, лежащую в плоскости, перпендикулярной одному из ребер коробки; 2) Гоша никогда не меняет направление движения по маршруту; 3) сумма чисел по всем квадратам, встречающимся на пути Гоши, не зависит от маршрута и равна 2880. Какие числа написаны на гранях коробки?

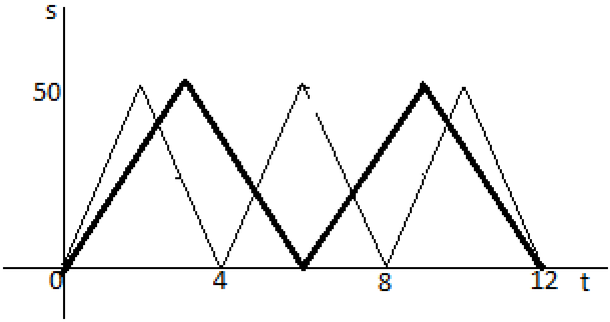
4. Точки P, Q расположены на сторонах AB и AC треугольника ABC так, что $AP : PB = 2 : 1$, $AQ : QC = 1 : 3$. Точка M выбрана на стороне BC совершенно случайно. Найти вероятность того, что площадь треугольника ABC превосходит площадь треугольника PQM не более, чем в три раза. Найти математическое ожидание случайной величины – отношения площадей треугольников PQM и ABC.

5. Представить число 2020 в виде суммы кубов пяти целых чисел. Доказать, что любое целое число можно представить в виде суммы кубов пяти целых чисел.

6. В каком отношении $CE:CD$ точка E делит сторону CD основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, боковое ребро которой наклонено к основанию под углом 30^0, если известно, что площадь треугольника SBE минимально возможная?

Ответы и решения

1. Пусть $s_1(t), s_2(t)$ – расстояния до линии старта Пети и Кости соответственно в момент времени t. Графики этих функций изображены на рис.



Запишем аналитические выражения для $s_1(t), s_2(t)$:

$$s_1(t) = \frac{50}{\pi}\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right),\ \ s_2(t) = \frac{50}{\pi}\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right), t \ge 0$$

Моменты времени, когда пловцы находятся на одинаковом расстоянии от линии старта ($s = 0$) определяются равенством:

$$s_1(t) = s_2(t) \to \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) \to \left[\begin{array}{l} t_k = 12k, k = 0,1,.. \\ t_m = \dfrac{12m}{5}, m = 0,1,.. \end{array}\right.$$

Вторая серия содержит в себе первую для m кратного 5. Неравенство $0 \le t_m \le 60$ дает искомое число раз:

$$0 \le \frac{12m}{5} \le 60 \to 0 \le m \le 25$$

т.е. 26 раз, включая начальное положение, пловцы находятся на одном расстоянии от линии старта.

Ответ: 26 раз.

2. Две точки $A(x; y)$ и $B(x'; y')$ симметричны относительно прямой $x + y = 0$, если $x' = -y, y' = -x$. Это приводит к системе:

$$\begin{cases} \sin a = -\cos 3a \\ \sin 3a = -\cos a \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$$\sin a = -\cos 3a \to \cos 3a = \sin(-a) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) \to$$

$$\left[\begin{array}{l} 3a = \dfrac{\pi}{2} + a + 2\pi m \\ 3a = -\dfrac{\pi}{2} - a + 2\pi n \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{ll} a = \dfrac{\pi}{4} + \pi m & (*) \\ a = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2} & (**) \end{array}\right. .$$

Подставляем (*) во второе уравнение системы:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4} + 3\pi m\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi m\right) \to$$

$$(-1)^m \sin\frac{3\pi}{4} = -(-1)^m \cos\frac{\pi}{4} \to \frac{\sqrt{2}}{2} \ne -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Серия (*) решений не содержит.

Подставляем (**) во второе уравнение системы:

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi n}{2}\right) = -\cos\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\right) \to$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{3\pi n}{2}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{8} - \frac{\pi n}{2}\right).$$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{3\pi}{8}-\dfrac{3\pi n}{2}=\dfrac{5\pi}{8}-\dfrac{\pi n}{2}+2\pi s\\ \dfrac{3\pi}{8}-\dfrac{3\pi n}{2}=\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2}+2\pi k\end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l}\dfrac{\pi}{4}=-\pi n+2\pi s,\ (\wedge)\\ \quad n=-k,\ (\wedge\wedge)\end{array}\right.$$

Серия (^) пуста, поскольку равенства нет ни при каких целых n и s. Серия (^^) содержит любые целые n. Серия (**) искомая.

Ответ: $a=-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z.$

3. Пусть в квадратах граней AA_1B_1B, AA_1D_1D, $ABCD$ и параллельным им гранях написаны числа $x, y, z,$ соответственно. Длины ребер $AB=3$, $AD=5$, $AA_1=4$. Выберем любой центр M_1 квадрата, расположенного, например, в грани AA_1D_1D – начало маршрута Гоши. Существуют два допустимых по условиям 1) и 2) задачи маршрута с началом в этой точке. Первый, представляет собой ломаную пересечения поверхности коробки с плоскостью, проходящей через точку M_1, параллельную основанию $ABCD$. Сумма чисел σ_1, расположенных в квадратах на пути Гоши по этому маршруту, равна $\sigma_1=2(5y+3x)$. Второй допустимый маршрут – ломаная пересечения поверхности коробки и плоскости, проходящей через M_1 и параллельной грани AA_1B_1B. Соответствующая сумма для этого маршрута $\sigma_2=2(4y+3z)$. Возьмем любой центр M_2 квадрата, расположенного на грани DD_1C_1C и соответствующий ему маршрут, полученный пересечением поверхности коробки с плоскостью, параллельной грани AA_1D_1D. Соответствующая ему сумма $\sigma_3=2(4y+5z)$. Все три суммы по условию должны быть равными:

$$\begin{cases}2(4x+5z)=2(4y+3z)\\ 2(4x+5z)=2(3x+5y)\end{cases}\to\begin{cases}2x-2y+z=0\\ x-5y+5z=0\end{cases}\to$$

$$9x = 5y \to \begin{cases} x = 5t \\ y = 9t, t \in Z. \\ z = 8t \end{cases}$$

По условию,

$$2 \cdot (4x + 5z) = 2880.$$

В результате имеем

$$2(20t + 40t) = 2880 \to 120t = 2880 \to t = 24 \to$$

$$x = 5t = 120, y = 9t = 216, z = 8t = 192.$$

Ответ: $120, 192, 216.$

4. По условию задачи случайная величина $\xi = \dfrac{CM}{CB}$ равномерно распределена на отрезке $[0;1]$. Если x – значение с.в. ξ, то

$$\mathrm{s}(x) = \mathrm{S}_{PQM} = S_{ABC} \cdot \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{3x}{4} - \frac{(1-x)}{3}\right) = \frac{S_{ABC}}{12}(6-5x) \to \frac{\mathrm{S}_{PQM}}{S_{ABC}} \geq \frac{1}{3}.$$

Тогда условие $\dfrac{\mathrm{S}_{PQM}}{S_{ABC}} \geq \dfrac{1}{3}$ принимает вид

$$\frac{6-5x}{12} \geq \frac{1}{3}.$$

Отсюда находим $x \leq \dfrac{2}{5}$. С учетом равномерности распределения $P(A) = \dfrac{2}{5}$.

Найдем математическое ожидание случайной величины $X = \dfrac{S_{PQM}}{S_{ABC}}$:

$$M_X = \int_0^1 \frac{6-5x}{12} dx = -\frac{1}{120}\left(6-5x\right)^2 \Big|_0^1 = \frac{7}{24}.$$

Ответ: 1) $P(A) = \dfrac{2}{5}$; 2) $M_X = \dfrac{7}{24}$.

5. Заметим, что для любого $n \in Z$

$$(n+1)^3+(n-1)^3+(-n)^3+(-n)^3=6n,$$

т.е. любое целое число вида $a=6n$ можно представить в виде суммы кубов четырех, а значит, с учетом нуля, и пяти целых чисел. Числа вида $a=6n\pm1$ могут быть представлены в форме

$$a=(n+1)^3+(n-1)^3+(-n)^3+(-n)^3+(\pm1)^3. \qquad (1)$$

Числа вида $a=6n+2=6(n-1)+8$ представляются суммой пяти кубов:

$$a=n^3+(n-2)^3+(-n+1)^3+(-n+1)^3+2^3. \qquad (2)$$

Для чисел вида $a=6n-2=6(n+1)-8$ справедливо представление:

$$a=(n+2)^3+n^3+(-n-1)^3+(-n-1)^3+(-2)^3. \qquad (3)$$

Наконец, для $a=6n+3=6(n-4)+27$ справедливо представление:

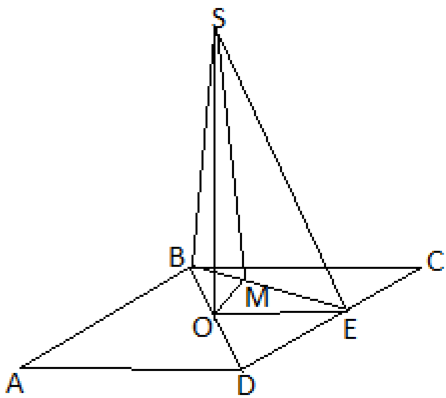
$$a=(n-3)^3+(n-5)^3+(-n+4)^3+(-n+4)^3+(3)^3 \qquad (4)$$

Представление числа $a=2020=337\cdot6-2$ может быть получено по формуле (3) для $n=337$:

$$2020=(339)^3+337^3+(-338)^3+(-338)^3+(-2)^3.$$

Ответ: $2020=(339)^3+337^3+(-338)^3+(-338)^3+(-2)^3.$

6. Введем обозначения (см. рис): a – сторона основания, $\measuredangle SBO=\beta$, $OM\perp BE$, $\measuredangle CBE=\alpha$ – переменная величина, $\measuredangle EBD=45^0-\alpha$, $SO=H$ – высота пирамиды, $\measuredangle SMO=\gamma$.



Тогда

$$BO=\frac{a}{\sqrt{2}},OM=\frac{a\sin\left(45^0-\alpha\right)}{\sqrt{2}},BE=\frac{a}{\cos\alpha}.$$

Найдем площадь проекции сечения BSE

$$S_{BOE}=\frac{a^2\sin\left(45^0-\alpha\right)}{2\sqrt{2}\cos\alpha}.$$

Вычислим угол наклона сечения BSE:

$$tg\gamma=\frac{H}{OM}=\frac{H\sqrt{2}}{a\sin(45^0-\alpha)}\rightarrow 1+tg^2\gamma=1+\frac{2H^2}{a^2\sin^2(45^0-\alpha)}\rightarrow$$

$$\frac{1}{\cos\gamma}=\frac{\sqrt{2H^2+a^2\sin^2(45^0-\alpha)}}{a\sin(45^0-\alpha)}.$$

Тогда

$$S_{SBE}=\frac{S_{BOE}}{\cos\gamma}=\frac{a}{2\sqrt{2}\cos\alpha}\sqrt{2H^2+a^2\sin^2\left(45^0-\alpha\right)}.$$

Преобразуем полученное выражение:

$$S_{SBE}=\frac{a}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{4H^2+a^2(1-\sin 2\alpha)}{1+\cos 2\alpha}}$$

Наименьшее значение площади соответствует значению α, $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, при котором функция

$$f(\alpha)=\frac{4H^2+a^2(1-\sin 2\alpha)}{1+\cos 2\alpha}$$

имеет минимум.

Для нахождения экстремумов вычислим производную полученной функции и приравняем ее нулю:

$$f'(\alpha)=\left(\frac{4H^2+a^2(1-\sin 2\alpha)}{1+\cos 2\alpha}\right)'=$$

$$\frac{-2a^2\cos 2\alpha\cdot\left(1+\cos 2\alpha\right)+2\left(4H^2+a^2(1-\sin 2\alpha)\right)\sin 2\alpha}{\left(1+\cos 2\alpha\right)^2}=$$

$$=\frac{-2a^2+2(4H^2+a^2)\sin 2\alpha-2a^2\cos 2\alpha}{\left(1+\cos 2\alpha\right)^2}=$$

$$\frac{4(4H^2+a^2)\sin\alpha\cos\alpha-4a^2\cos^2\alpha}{\left(1+\cos 2\alpha\right)^2}=0.$$

На отрезке $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, $\cos\alpha\neq 0$, поэтому единственной критической точкой $\alpha=\alpha*$ является точка, для которой

$$tg\alpha*=\frac{a^2}{4H^2+a^2}.$$

Так как $f'(0)=-a^2<0$, а $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=8H^2>0$, то найденная точка является точкой минимума. С учетом того, что $H=\frac{atg\beta}{\sqrt{2}}$, получаем

$$tg\alpha*=\frac{1}{2tg^2\beta+1}.$$

Тогда $CE:CD=CE:BC=tg\alpha*=\frac{1}{2tg^2\beta+1}=\frac{1}{2/3+1}=\frac{3}{5}$.

Ответ: $3:5$.

Вариант № 2

1. В бассейне, на соседних дорожках тренируются два пловца Петя и Костя. Петя проплывает дорожку 50 м за две минуты, Костя – за три. Вначале тренировки оба находились на линии старта у края дорожки, спустя 60 мин тренировка закончилась. Сколько раз за это время, включая начало, они находились на одинаковом расстоянии от линии старта?

Ответ: 46 раз.

2. При каких значениях a точка с координатами $(\sin a; \sin 3a)$ симметрична точке с координатами $(\cos a; \cos 3a)$ относительно прямой с уравнением $x + y = 0$.

Ответ: $a = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ a = (2n-1)\pi,\ n \in Z.$

3. Поверхность коробки размером $3\times4\times5$ разбита на 94 квадрата размером 1×1. В квадратах, принадлежащих одной грани, написаны одинаковые натуральные числа. На параллельной ей грани коробки эти числа повторяются (на каждой паре параллельных граней числа, вообще говоря, разные). Муравей Гоша совершает путешествия по поверхности коробки, соблюдая следующие правила: 1) маршрут начинается в центре любого из указанных квадратов, заканчивается в нем же и представляет собой замкнутую ломаную, лежащую в плоскости, перпендикулярной одному из ребер коробки; 2) Гоша никогда не меняет направление движения по маршруту; 3) сумма чисел по всем квадратам, встречающимся на пути Гоши, не зависит от маршрута и равна 2880. Какие числа написаны на гранях коробки?

Ответ: 18, 20, 8.

4. Точки P, Q расположены на сторонах AB и AC треугольника ABC так, что $AP:PB = 2:1,\ AQ:QC = 1:3$. Точка M выбрана на стороне BC совершенно случайно. Найти вероятность того, что площадь треугольника ABC превосходит площадь треугольника PQM не более, чем в три раза. Найти математическое ожидание случайной величины – отношения площадей треугольников PQM и ABC.

Ответ: 1) $P(A) = \frac{9}{16}$; 2) $M_X = \frac{4}{15}$.

5. Представить число 2020 в виде суммы кубов пяти целых чисел. Доказать, что любое целое число можно представить в виде суммы кубов пяти целых чисел.

Ответ: $2024 = 337^3 + (335)^3 + (-336)^3 + (-336)^3 + 2^3.$

6. В каком отношении $CE : CD$ точка E делит сторону CD основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, боковое ребро которой наклонено к основанию под углом 30^0, если известно, что площадь треугольника SBE минимально возможная?

Ответ: $1:4$.

Вариант № 3

1. В бассейне, на соседних дорожках тренируются два пловца Петя и Костя. Петя проплывает дорожку 50 м за одну минуту, Костя – за 80 сек. Вначале тренировки оба находились на линии старта у края дорожки, спустя 45 мин тренировка закончилась. Сколько раз за это время, включая начало, они находились на одинаковом расстоянии от линии старта?

Ответ: 40 раз.

2. При каких значениях a точка с координатами $(\sin 2a; \cos 3a)$ симметрична точке с координатами $(\sin 3a; \cos 2a)$ относительно оси ординат.

Ответ: $a = \dfrac{2\pi n}{5}, n \in Z.$

3. Поверхность коробки размером $3\times5\times7$ разбита на 142 квадрата размером 1×1. В квадратах, принадлежащих одной грани, написаны одинаковые натуральные числа. На параллельной ей грани коробки эти числа повторяются (на каждой паре параллельных граней числа, вообще говоря, разные). Муравей Гоша совершает путешествия по поверхности коробки, соблюдая следующие правила: 1) маршрут начинается в центре любого из указанных квадратов, заканчивается в нем же и представляет собой замкнутую ломаную, лежащую в плоскости, перпендикулярной одному из ребер коробки; 2) Гоша никогда не меняет направление движения по маршруту; 3) сумма чисел по всем квадратам, встречающимся на пути Гоши, не зависит от маршрута и равна 1260. Какие числа написаны на гранях коробки?

Ответ: $21, 75, 81$.

4. Точки P, Q расположены на сторонах AB и AC треугольника ABC так, что $AP:PB=1:3$, $AQ:QC=1:1$. Точка M выбрана на стороне BC совершенно случайно. Найти вероятность того, что площадь треугольника ABC превосходит площадь треугольника PQM не более, чем в шесть раз. Найти математическое ожидание случайной величины – отношения площадей треугольников PQM и ABC.

Ответ: 1) $P(A)=\dfrac{5}{6}$; 2) $M_X=\dfrac{1}{4}$.

5. Представить число 1947 в виде суммы кубов пяти целых чисел. Доказать, что любое целое число можно представить в виде суммы кубов пяти целых чисел.

Ответ: $1947=(321)^3+(319)^3+(-320)^3+(-320)^3+(3)^3$.

6. В каком отношении $CE:CD$ точка E делит сторону CD основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с углом при вершине 60^0, если известно, что площадь треугольника SBE минимально возможная?

Ответ: $1:3$.

Вариант № 4

1. В бассейне, на соседних дорожках тренируются два пловца Петя и Костя. Петя проплывает дорожку 50 м за 42 сек, Костя – за 90 сек. Вначале тренировки оба находились на линии старта у края дорожки, спустя 60 мин тренировка закончилась. Сколько раз за это время, включая начало, они находились на одинаковом расстоянии от линии старта?

Ответ: 80 раз.

2. При каких значениях a точка с координатами $(\cos a; \sin a)$ симметрична точке с координатами $(\cos 2a; -\sin 2a)$ относительно прямой с уравнением $x - y = 0$.

Ответ: $a = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

3. Поверхность коробки размером $4 \times 5 \times 6$ разбита на 148 квадратов размером 1×1. В квадратах, принадлежащих одной грани, написаны одинаковые натуральные числа. На параллельной ей грани коробки эти числа повторяются (на каждой паре параллельных граней числа, вообще говоря, разные). Муравей Гоша совершает путешествия по поверхности коробки, соблюдая следующие правила: 1) маршрут начинается в центре любого из указанных квадратов, заканчивается в нем же и представляет собой замкнутую ломаную, лежащую в плоскости, перпендикулярной одному из ребер коробки; 2) Гоша никогда не меняет направление движения по маршруту; 3) сумма чисел по всем квадратам, встречающимся на пути Гоши, не зависит от маршрута и равна 960. Какие числа написаны на гранях коробки?

Ответ: $36, 50, 56.$

4. Точки P, Q расположены на сторонах AB и AC треугольника ABC так, что $AP : PB = 1 : 4,\ AQ : QC = 3 : 1$. Точка M выбрана на стороне BC совершенно случайно. Найти вероятность того, что площадь треугольника ABC превосходит площадь треугольника PQM не более, чем в два раза. Найти математическое ожидание случайной величины – отношения площадей треугольников PQM и ABC.

Ответ: 1) $P(A) = \dfrac{2}{11}$; 2) $M_X = \dfrac{13}{40}.$

5. Представить число 1480 в виде суммы кубов пяти целых чисел. Доказать, что любое целое число можно представить в виде суммы кубов пяти целых чисел.

Ответ: $1480 = (249)^3 + 247^3 + (-248)^3 + (-248)^3 + \left(-2\right)^3$.

6. В каком отношении $CE : CD$ точка E делит сторону CD основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, противоположные боковые ребра которой составляют угол 60^0, если известно, что площадь треугольника SBE минимально возможная?

Ответ: $1:7$.