Очный отборочный тур в регионах, осень 2018
11 класс (второй выезд)

Вариант № 1

1. Знаменатель геометрической прогрессии b_n равен q, а при некотором натуральном $n \geq 2$

$$\log_2 b_2 + \log_2 b_3 + ... + \log_2 b_n = 2 \cdot \log_2 b_1 .$$

Найти наименьшее возможное значение $\log_q b_1^2$, если известно, что оно целое. При каком n это значение достигается?

2. Решить уравнение $3[\sin x] + 2[\cos x] = [\sin 2x]$, где $[a]$ – целая часть числа a, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a.

3. Доказать, что дробь $\dfrac{2a^4 + 4a^2 + 1}{2a^3 + 3a}$ несократимая при любых натуральных a.

4. На отрезке длины L случайным образом взяты две точки, разделившие его на три части. Найти вероятность того, что длина одной из этих частей окажется не меньшей $5L/12$.

5. При каких a система

$$\begin{cases} (x-7)\sin a - (y-1)\cos a = 0 \\ \left((x-4)^2 + (y-4)^2 - 1\right)\left((x-4)^2 + (y-4)^2 - 4\right) = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

6. Точки P, Q и K расположены на боковых ребрах SA, SB, SC треугольной пирамиды $SABC$ так, что

$$SP : SA = 1:2, SQ : SB = 2:3, SK : SC = 3:5 .$$

Объем пирамиды $SABC$ равен 15. Точка M принадлежит треугольнику ABC основания пирамиды. Найти максимально возможное значение объема пирамиды $MPQK$.

Вариант № 2

1. Знаменатель геометрической прогрессии b_n равен q, а при некотором натуральном $n \geq 2$

$$\log_3 b_2 + \log_3 b_3 + \ldots + \log_3 b_n = 3 \cdot \log_3 b_1 .$$

Найти наибольшее возможное значение $\log_q b_1^2$, если известно, что оно целое. При каком n это значение достигается?

2. Решить уравнение $[\sin 2x] - 2[\cos x] = 3[\sin 3x]$, где $[a]$ – целая часть числа a, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a.

3. Доказать, что дробь $\dfrac{2a^2 + a + 1}{2a^3 + a^2 + 2a}$ несократимая при любых натуральных a.

4. На отрезке длины L случайным образом взяты две точки, разделившие его на три части. Найти вероятность того, что длина одной из этих частей окажется не меньшей $3L/4$.

5. При каких система

$$\begin{cases} x \sin a - (y-6)\cos a = 0 \\ \left((x-3)^2 + (y-3)^2 - 1\right)\left((x-3)^2 + (y-3)^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$

имеет два решения?

6. Точки P, Q и K расположены на боковых ребрах SA, SB, SC треугольной пирамиды $SABC$ так, что

$$SP : SA = 2:3,\ SQ : SB = 1:4,\ SK : SC = 1:3.$$

Объем пирамиды $SABC$ равен 12. Точка M принадлежит треугольнику ABC основания пирамиды. Найти максимально возможное значение объема пирамиды $MPQK$.

Вариант № 3

1. Знаменатель геометрической прогрессии b_n равен q, а при некотором натуральном $n \geq 2$

$$\log_4 b_2 + \log_4 b_3 + \ldots + \log_4 b_n = 4 \cdot \log_4 b_1 .$$

Найти наименьшее возможное значение $\log_q b_1^2$, если известно, что оно целое. При каком n это значение достигается?

2. Решить уравнение $\cos 3x + 2 \sin 2x] = [\cos x]$, где $[a]$ – целая часть числа a, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a.

3. Доказать, что дробь $\dfrac{6a^4 + 6a^2 + 1}{6a^3 + 3a}$ несократимая при любых натуральных a.

На отрезке длины L случайным образом взяты две точки, разделившие его на три части. Найти вероятность того, что длина одной из этих частей окажется не меньшей $4L/9$.

5. При каких a система

$$\begin{cases} (x-5)\sin a - (y-5)\cos a = 0 \\ \left((x+1)^2 + (y+1)^2 - 4\right)\left((x+1)^2 + (y+1)^2 - 16\right) = 0 \end{cases}$$

имеет три решения?

6. Точки P, Q и K расположены на боковых ребрах SA, SB, SC треугольной пирамиды $SABC$ так, что

$$SP : SA = 2:5,\ SQ : SB = 1:2,\ SK : SC = 4:9 .$$

Объем пирамиды $SABC$ равен 45. Точка M принадлежит треугольнику ABC основания пирамиды. Найти максимально возможное значение объема пирамиды $MPQK$.

Вариант № 4

1. Знаменатель геометрической прогрессии b_n равен q, а при некотором натуральном $n \geq 2$

$$\log_5 b_2 + \log_5 b_3 + \ldots + \log_5 b_n = 5 \cdot \log_5 b_1 .$$

Найти наибольшее возможное значение $\log_q b_1^2$, если известно, что оно целое. При каком n это значение достигается?

2. Решить уравнение $2 \ \cos 2x] - [\sin x] = 3[\sin 4x]$, где $[a]$ – целая часть числа a, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a.

3. Доказать, что дробь $\dfrac{2a^2 + a + 1}{2a^3 + 3a^2 + 2a}$ несократимая при любых натуральных a.

4. На отрезке длины L случайным образом взяты две точки, разделившие его на три части. Найти вероятность того, что длина одной из этих частей окажется не меньшей $2L/3$.

5. При каких   система

$$\begin{cases} (x-8)\sin a - (y+2)\cos a = 0 \\ \left((x-3)^2 + (y-3)^2 - 1\right)\left((x-3)^2 + (y-3)^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$

имеет четыре решения?

6. Точки P, Q и K расположены на боковых ребрах SA, SB, SC треугольной пирамиды $SABC$ так, что

$$SP : SA = 3:5,\ SQ : SB = 2:3,\ SK : SC = 1:6 .$$

Объем пирамиды $SABC$ равен 24. Точка M принадлежит треугольнику ABC основания пирамиды. Найти максимально возможное значение объема пирамиды $MPQK$.