Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом», математика,
11 класс.

Вариант № 1

1. Робот умеет совершать маневры двух типов: шагать по прямой вперед на 510 шагов и останавливаться, а также проходить по той же прямой 390 шагов назад и останавливаться. Заряд батареи допускает не более 20 таких маневров. Задача робота – остановиться как можно ближе к объекту, расположенному впереди на расстоянии 692 шага от начального положения робота. На каком наименьшем расстоянии от объекта может остановиться робот (в шагах)? Сколько раз при этом робот совершит движение вперед и назад?

2. При каком значении a уравнение $|\sin(2x-y)|+|\cos(x+2y)|+1=\frac{2a}{a^2+1}$ имеет решение? Найти эти решения. Найти минимальное R, при котором любой круг радиуса R на плоскости содержит хотя бы одну точку с координатами $(x;y)$ – решениями уравнения.

3. Ученикам на входе в школу разрешалось брать из коробки любое количество карандашей. Позже выяснилось, что не менее 60% карандашей, полученных любой группой из десяти человек, оказывались у одного ученика из этой группы. Доказать, что в школе есть ученик, забравший более 58% карандашей, взятых всеми школьниками из коробки.

4. На боковых ребрах DA и DB правильной треугольной пирамиды $ABCD$ совершенно случайно взяты точки M и N. Найти вероятность того, что площадь боковой поверхности пирамиды $MNCD$ с вершиной в точке D составляет не более половины площади боковой поверхности пирамиды $ABCD$.

5. При каких b система уравнений $\begin{cases}(x-a)^2+(y-a+b)^2=2\\ (x-y+3)(x-y-1)=0\end{cases}$ имеет решения при любых a?

6. На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки M и N так, что $AM=CN=\sqrt{3}$. Точка P – середина отрезка MN, точка Q – середина стороны AC. Угол при вершине B треугольника ABC равен 60^0. Найти длину отрезка PQ.

Вариант № 2

1. Робот умеет совершать маневры двух типов: шагать по прямой вперед на 273 шага и останавливаться, а также проходить по той же прямой 231 шаг назад и останавливаться. Заряд батареи допускает не более 15 таких маневров. Задача робота – остановиться как можно ближе к объекту, расположенному впереди на расстоянии 528 шага от начального положения робота. На каком наименьшем расстоянии от объекта может остановиться робот (в шагах)? Сколько раз при этом робот совершит движение вперед и назад?

2. При каком значении a уравнение $|\sin(3x+4y)|+|\cos(3y-4x)|+2=\frac{8a}{a^2+4}$ имеет решение? Найти эти решения. Найти минимальное R, при котором любой круг радиуса R на плоскости содержит хотя бы одну точку с координатами $(x;y)$ – решениями уравнения.

3. Ученикам на входе в школу разрешалось брать из коробки любое количество жвачки. После выяснилось, что не менее 70% жвачки, полученной любой группой из восьми человек, оказывалось у одного ученика из этой группы. Доказать, что в школе есть ученик, забравший более 68% жвачки, взятой всеми школьниками из коробки.

4. На боковых ребрах DA и DB правильной треугольной пирамиды $ABCD$ совершенно случайно взяты точки M и N. Найти вероятность того, что площадь боковой поверхности пирамиды $MNCD$ с вершиной в точке D составляет не менее трети площади боковой поверхности пирамиды $ABCD$.

5. При каких b система уравнений $\begin{cases} (x-\sqrt{3}a-b)^2+(y-3a-1,5)^2=4 \\ (\sqrt{3}x-y-3)(\sqrt{3}x-y+5)=0 \end{cases}$ не имеет решений при любых a ?

6. На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки M и N так, что $AM=CN=2$. Точка P – середина отрезка MN, точка Q – середина стороны AC. Угол при вершине B треугольника ABC равен 120^0. Найти длину отрезка PQ.

Вариант № 3

1. Робот умеет совершать маневры двух типов: шагать по прямой вперед на 595 шагов и останавливаться, а также проходить по той же прямой 385 шагов назад и останавливаться. Заряд батареи допускает не более 25 таких маневров. Задача робота – остановиться как можно ближе к объекту, расположенному впереди на расстоянии 721 шага от начального положения робота. На каком наименьшем расстоянии от объекта может остановиться робот (в шагах)? Сколько раз при этом робот совершит движение вперед и назад?

2. При каком значении a уравнение $|\sin(x+y)|+|\sin(x-y)|+|a-3|=0$ имеет решение? Найти эти решения. Найти минимальное R, при котором любой круг радиуса R на плоскости содержит хотя бы одну точку с координатами $(x;y)$ – решениями уравнения.

3. Ученикам на входе в школу разрешалось брать из коробки любое количество конфет. После выяснилось, что не менее 75% конфет, полученных любой группой из шести человек, оказывались у одного ученика из этой группы. Доказать, что в школе есть ученик, забравший более 73% конфет, взятых всеми школьниками из коробки.

4. На боковых ребрах DA и DB правильной треугольной пирамиды $ABCD$ совершенно случайно взяты точки M и N. Найти вероятность того, что площадь боковой поверхности пирамиды $MNCD$ с вершиной в точке D составляет не более четверти площади боковой поверхности пирамиды $ABCD$.

5. При каких b система уравнений $\begin{cases} (x-\sqrt{3}(a-b))^2+(y-a)^2=\dfrac{27}{4} \\ (x-\sqrt{3}y-2\sqrt{3})(x-\sqrt{3}y+4\sqrt{3})=0 \end{cases}$ имеет решения при любых a ?

6. На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки M и N так, что $AM=CN=2\sqrt{2}$. Точка P – середина отрезка MN, точка Q – середина стороны AC. Угол при вершине B треугольника ABC равен 90^0. Найти длину отрезка PQ.

Вариант № 4

1. Робот умеет совершать маневры двух типов: шагать по прямой вперед на 644 шагов и останавливаться, а также проходить по той же прямой 308 шагов назад и останавливаться. Заряд батареи допускает не более 13 таких маневров. Задача робота – остановиться как можно ближе к объекту, расположенному впереди на расстоянии 724 шага от начального положения робота. На каком наименьшем расстоянии от объекта может остановиться робот (в шагах)? Сколько раз при этом робот совершит движение вперед и назад?

2. При каком значении a уравнение $|\cos(2x+3y)|+|\cos(3x-2y)|-|a+4|=2$ имеет решение? Найти эти решения. Найти минимальное R, при котором любой круг радиуса R на плоскости содержит хотя бы одну точку с координатами $(x;y)$ – решениями уравнения.

3. Ученикам на входе в школу разрешалось брать из коробки любое количество ручек. После выяснилось, что не менее 65% ручек, полученных любой группой из семи человек, оказывались у одного ученика из этой группы. Доказать, что в школе есть ученик, забравший более 62% ручек, взятых всеми школьниками из коробки.

4. На боковых ребрах DA и DB правильной треугольной пирамиды $ABCD$ совершенно случайно взяты точки M и N. Найти вероятность того, что площадь боковой поверхности пирамиды $MNCD$

с вершиной в точке D составляет не менее двух третей площади боковой поверхности пирамиды $ABCD$.

5. При каких b система уравнений $\begin{cases} (x-2a)^2+(y+2a-b)^2=4,5 \\ (x+y+4)(x+y-2)=0 \end{cases}$ не имеет решений при любых a?

6. На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки M и N так, что $AM=CN=3\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$. Точка P – середина отрезка MN, точка Q – середина стороны AC. Угол при вершине B треугольника ABC равен 150^0. Найти длину отрезка PQ.