Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом», математика,
11 класс.

Вариант № 1

1. На проволоку в форме окружности радиуса 6 нанизаны 5 одинаковых бусинок, равноотстоящих друг от друга. В некоторый момент времени 4 бусинки начали двигаться со скоростью $\frac{\pi}{2}$ (1/сек) в направлении против часовой стрелки, а оставшаяся бусинка – с той же скоростью в обратном направлении. После столкновения любых двух бусинок величина скорости их движения сохраняется, а направление мгновенно меняется на противоположное. Сколько столкновений произойдет между бусинками за 48 сек.?

2. На плоскости расположено множество параллелограммов, для которых 1) координаты $(x;y)$ их вершин являются решениями системы $\begin{cases}\sin(x+y)=\cos(2x-y)\\ \cos(x-y)=\sin(x+2y)\end{cases}$; 2) координаты $(x;y)$ граничных точек являются решениями объединения $\left[\begin{array}{l}\sin(x+y)=\cos(2x-y)\\ \cos(x-y)=\sin(x+2y)\end{array}\right.$. Найти наименьшее возможное значение площади таких параллелограммов.

3. Известно, что дробь $\frac{m(n+69m)}{n(m+69n)}$ сократимая для некоторых взаимно простых целых чисел m и n. Найти наибольшее простое число d, на которое делится числитель и знаменатель дроби.

4. На сторонах BA и BC треугольника ABC совершенно случайно взяты точки M и N. Найти вероятность того, что площадь треугольника BMN окажется не больше половины площади треугольника ABC.

5. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases}(x^2+y^2-25)(4x+3y-25)=0\\ (x-6\cos a)^2+(y-6\sin a)^2=1\end{cases}$ имеет единственное решение?

6. Расстоянием между двумя точками на поверхности прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ называют наименьшую длину ломаной на поверхности, соединяющей эти точки.
По поверхности параллелепипеда с размерами $AB=2,\ AD=2\sqrt{2},\ AA'=4$ ползет муравей так, что расстояние на поверхности между ним и вершиной A всегда постоянное и равно $2\sqrt{2}$. Нарисовать замкнутую траекторию движения муравья по поверхности параллелепипеда и найти ее длину.

Вариант № 2

1. На проволоку в форме окружности радиуса 8 нанизаны 6 одинаковых бусинок, равноотстоящих друг от друга. В некоторый момент времени 5 бусинок начали двигаться со скоростью π (1/сек) в направлении против часовой стрелки, а оставшаяся бусинка – с той же скоростью в обратном направлении. После столкновения любых двух бусинок величина скорости их движения сохраняется, а направление мгновенно меняется на противоположное. Сколько столкновений произойдет между бусинками за 96 сек.?

2. На плоскости расположено множество параллелограммов, для которых 1) координаты $(x;y)$ их вершин являются решениями системы $\begin{cases}\sin(x+3y)=\cos(2x-y)\\ \cos(x-y)=\sin(3x-2y)\end{cases}$; 2) координаты $(x;y)$ граничных

точек являются решениями объединения $\left[\begin{array}{l}\sin(x+3y)=\cos(2x-y)\\ \cos(x-y)=\sin(3x-2y)\end{array}\right.$. Найти наименьшее возможное значение площади таких параллелограммов.

3. Известно, что дробь $\dfrac{m(n+73m)}{n(m+73n)}$ сократимая для некоторых взаимно простых целых чисел m и n. Найти наибольшее простое число d, на которое делится числитель и знаменатель дроби.

4. На сторонах BA и BC треугольника ABC совершенно случайно взяты точки M и N. Найти вероятность того, что площадь треугольника BMN окажется не меньше трети площади треугольника ABC.

5. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases}(x^2+y^2-16)(x+y-4\sqrt{2})=0\\ (x-5\cos a)^2+(y-5\sin a)^2=1\end{cases}$ имеет два различных решения?

6. Расстоянием между двумя точками на поверхности прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ называют наименьшую длину ломаной на поверхности, соединяющей эти точки.

По поверхности параллелепипеда с размерами $AB=\sqrt{2},\ AD=3,\ AA'=4$ ползет муравей так, что расстояние на поверхности между ним и вершиной A всегда постоянное и равно 2. Нарисовать замкнутую траекторию движения муравья по поверхности параллелепипеда и найти ее длину.

Вариант № 3

1. На проволоку в форме окружности радиуса 10 нанизаны 7 одинаковых бусинок, равноотстоящих друг от друга. В некоторый момент времени 6 бусинок начали двигаться со скоростью $\dfrac{\pi}{3}$ (1/сек) в направлении против часовой стрелки, а оставшаяся бусинка – с той же скоростью в обратном направлении. После столкновения любых двух бусинок величина скорости их движения сохраняется, а направление мгновенно меняется на противоположное. Сколько столкновений произойдет между бусинками за 120 сек.?

2. На плоскости расположено множество параллелограммов, для которых 1) координаты $(x;y)$ вершин являются решениями системы $\begin{cases}\sin(x+2y)=\sin(2x-3y)\\ \cos(3x+y)=\cos(x-2y)\end{cases}$; 2) координаты $(x;y)$ всех граничных точек являются решениями объединения $\left[\begin{array}{l}\sin(x+2y)=\sin(2x-3y)\\ \cos(3x+y)=\cos(x-2y)\end{array}\right.$. Найти наименьшее возможное значение площади параллелограмма.

3. Известно, что дробь $\dfrac{m(n+83m)}{n(m+83n)}$ сократимая для некоторых взаимно простых целых чисел m и n. Найти наибольшее простое число d, на которое делится числитель и знаменатель дроби.

4. На сторонах BA и BC треугольника ABC совершенно случайно взяты точки M и N. Найти вероятность того, что площадь треугольника BMN окажется не больше четверти площади треугольника ABC.

5. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases}(x^2+y^2-169)(12x+5y-169)=0\\ (x-14\cos a)^2+(y-14\sin a)^2=1\end{cases}$ имеет три различных решения?

6. Расстоянием между двумя точками на поверхности прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ называют наименьшую длину ломаной на поверхности, соединяющей эти точки.

По поверхности параллелепипеда с размерами $AB=3,\ AD=3\sqrt{2},\ AA'=5$ ползет муравей так, что расстояние на поверхности между ним и вершиной A всегда постоянное и равно $3\sqrt{2}$. Нарисовать замкнутую траекторию движения муравья по поверхности параллелепипеда и найти ее длину.

Вариант № 4

1. На проволоку в форме окружности радиуса 12 нанизаны 8 одинаковых бусинок, равноотстоящих друг от друга. В некоторый момент времени 7 бусинок начали двигаться со скоростью $\frac{\pi}{4}$ (1/сек) в направлении против часовой стрелки, а оставшаяся бусинка – с той же скоростью в обратном направлении. После столкновения любых двух бусинок величина скорости их движения сохраняется, а направление мгновенно меняется на противоположное. Сколько столкновений произойдет между бусинками за 192 сек.?

2. На плоскости расположено множество параллелограммов, для которых 1) координаты $(x;y)$ вершин являются решениями системы $\begin{cases}\cos(x+3y)=\cos(2x+y)\\ \sin(2x-y)=\sin(x+4y)\end{cases}$; 2) координаты $(x;y)$ всех граничных точек являются решениями объединения $\left[\begin{array}{l}\cos(x+3y)=\cos(2x+y)\\ \sin(2x-y)=\sin(x+4y)\end{array}\right.$. Найти наименьшее возможное значение площади параллелограмма.

3. Известно, что дробь $\frac{m(n+79m)}{n(m+79n)}$ сократимая для некоторых взаимно простых целых чисел m и n. Найти наибольшее простое число d, на которое делится числитель и знаменатель дроби.

4. На сторонах BA и BC треугольника ABC совершенно случайно взяты точки M и N. Найти вероятность того, что площадь треугольника BMN окажется не меньше пятой части площади треугольника ABC.

5. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases}(x^2+y^2-36)(x\sqrt{3}+y-12)=0\\ (x-8\cos a)^2+(y-8\sin a)^2=4\end{cases}$ имеет не менее двух различных решений?

6. Расстоянием между двумя точками на поверхности прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ называют наименьшую длину ломаной на поверхности, соединяющей эти точки.

По поверхности параллелепипеда с размерами $AB=3\sqrt{2},\ AD=7,\ AA'=8$ ползет муравей так, что расстояние на поверхности между ним и вершиной A всегда постоянное и равно 6. Нарисовать замкнутую траекторию движения муравья по поверхности параллелепипеда и найти ее длину.