Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом», математика,
11 класс.

Вариант № 1

1. Сколько различных пар целых чисел x и y, $1 \le x \le 100, 1 \le y \le 100$ удовлетворяют уравнению $НОД(\log_2 x, 36) = \log_3^2 y$? Найти эти пары.

2. Координаты $(x; y)$ вершин треугольника ABC являются решениями уравнения $|\cos(x-2y)| = -|\cos(x+y)|$. Найти наименьшее возможное значение площади треугольника.

3. Найти наибольшее число окружностей радиуса 1, не имеющих общих точек, которые могут одновременно касаться окружности радиуса 3.

4. В квадрате $ABCD$ со стороной 4 расположена точка O, отстоящая от сторон AD и CD на расстояние 1. Через точку O совершенно случайно проведена прямая L, разделяющая квадрат на две части. Найти вероятность того, что одна из частей будет иметь площадь, не превосходящую 3.

5. При каких a множество решений неравенства $x^2 + (|y| - a)^2 \le a^2$ содержит все пары чисел $(x; y)$, для которых $(x-4)^2 + (y-2)^2 \le 1$?

6. Около выпуклого четырехугольника $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны и по длине равны 5 и 6, можно описать окружность с центром в точке O. Найти площадь четырехугольника $ABCO$.

Вариант № 2

1. Сколько различных пар целых чисел x и y, $1 \le x \le 10000, 1 \le y \le 1000$ удовлетворяют уравнению $НОД(\log_3 x, 64) = \log_5^3 y$? Найти эти пары.

2. Координаты $(x; y)$ вершин треугольника ABC являются решениями уравнения $|\sin(x+3y)| = -|\cos(2x-y)|$. Найти наименьшее возможное значение площади треугольника.

3. Найти наибольшее число окружностей радиуса 1, не имеющих общих точек, которые могут одновременно касаться окружности радиуса 4.

4. В квадрате $ABCD$ со стороной 6 расположена точка O, отстоящая от сторон AD и CD на расстояние 2. Через точку O совершенно случайно проводится прямая L, разделяющая квадрат на две части. Найти вероятность того, что площадь одной из частей не превосходит 9.

5. При каких a множество решений неравенства $(|x| - a)^2 + (y-1)^2 \le a^2$ содержит хотя бы одну пару чисел $(x; y)$, для которых $(x-6)^2 + (y-1)^2 \le 1$?

6. Около выпуклого четырехугольника $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны и по длине равны 4 и 7, можно описать окружность с центром в точке O. Найти площадь четырехугольника $ABCO$.

Вариант № 3

1. Сколько различных пар целых чисел x и y, $1 \le x \le 2000, 1 \le y \le 500$ удовлетворяют уравнению $НОД(\log_2 x^2, 72) = \log_7^2 y$? Найти эти пары.

2. Координаты $(x; y)$ вершин треугольника ABC являются решениями уравнения $|\cos(x+2y)| = -|\sin(2x+y)|$. Найти наименьшее возможное значение площади треугольника.

3. Найти наибольшее число окружностей радиуса 1, не имеющих общих точек, которые могут одновременно касаться окружности радиуса 5.

4. В квадрате $ABCD$ со стороной 9 расположена точка O, отстоящая от сторон AD и CD на расстояние 3. Через точку O совершенно случайно проводятся прямые L, разделяющие квадрат на две части. Найти вероятность того, что одна из частей будет иметь площадь, не превосходящую $147/8$.

5. При каких a множество решений неравенства $(x-3)^2+(|y|-a)^2 \le a^2$ не содержит пар чисел $(x;y)$, для которых $(x-5)^2+(y+5)^2 \le 1$?

6. Около выпуклого четырехугольника $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны и по длине равны 2 и 3, можно описать окружность с центром в точке O. Найти площадь четырехугольника $ABCO$.

Вариант № 4

1. Сколько различных пар целых чисел x и y, $1 \le x \le 2000, 1 \le y \le 500$ удовлетворяют уравнению $НОД(\log_2 x^3, 675) = \log_5^2 y$? Найти эти пары.

2. Координаты $(x;y)$ вершин треугольника ABC являются решениями уравнения $|\sin(2x-3y)| = -|\cos(x+y)|$. Найти наименьшее возможное значение площади треугольника.

3. Найти наибольшее число окружностей радиуса 1, не имеющих общих точек, которые могут одновременно касаться окружности радиуса 2.

4. В квадрате $ABCD$ со стороной 8 расположена точка O, отстоящая от сторон AD и CD на расстояние 3. Через точку O совершенно случайно проводятся прямые L, разделяющие квадрат на две части. Найти вероятность того, что одна из частей будет иметь площадь, не превосходящую $75/4$.

5. При каких a множество решений неравенства $(|x|+a)^2+(y-2)^2 \le a^2$ содержит единственную пару чисел $(x;y)$, для которых $(x+4)^2+(y-3)^2 \le 1$?

6. Около выпуклого четырехугольника $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны и по длине равны 6 и 8, можно описать окружность с центром в точке O. Найти площадь четырехугольника $ABCO$.