

**Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, осень 2018**  
**10 класс**

**Вариант № 1**

1. Путь от школы до дома в 120 м Петя проделал, сделав 150 шагов, причем длина каждого шага была не более  $a$  см, а сумма длин любых двух шагов была больше длины любого другого шага. Какие значения при этих условиях может принимать число  $a$ ?

2. Целые положительные числа  $x, y$ , для которых  $\text{НОД}(x, y) = 2$ , являются координатами вершины квадрата с центром в начале координат и площадью  $10 \cdot \text{НОК}(x, y)$ . Найти эти числа.

3. При каких значениях  $x$  выражение

$$2 - |\cos(\pi \cos x)| - |\sin(2\pi\sqrt{3} \sin x)|$$

принимает наибольшее возможное значение?

4. Для каких значений  $a$  система 
$$\begin{cases} 3x^2 - 5x + a + 2 = 0 \\ 4x^2 - ax - 2a - 4 = 0 \end{cases}$$

совместна? Решить систему для всех допустимых  $a$ .

5. Центр окружности радиуса 1 лежит на окружности радиуса 2. Найти площадь объединения кругов, ограниченных этими окружностями.

## Вариант № 2

1. Путь от школы до дома в 140 м Коля проделал, сделав 200 шагов, причем длина каждого шага была не более  $a$  см, а сумма длин любых двух шагов была больше длины любого другого шага. Какие значения при этих условиях может принимать число  $a$  ?

2. Целые положительные числа  $x, y$ , для которых  $\text{НОД}(x, y) = 3$ , являются координатами вершины квадрата с центром в начале координат с площадью  $20 \cdot \text{НОК}(x, y)$ . Найти периметр квадрата.

3. При каких значениях  $x$  выражение

$$1 + \cos^2 \left( \frac{\pi \sin 2x}{\sqrt{3}} \right) + \sin^2 (2\sqrt{3}\pi \cos x)$$

принимает наименьшее возможное значение?

4. Для каких значений  $a$  система 
$$\begin{cases} 3x^2 - x - a - 10 = 0 \\ (a + 4)x + a + 12 = 0 \end{cases}$$

совместна? Решить систему для всех допустимых  $a$ .

5. Центр окружности радиуса 2 лежит на окружности радиуса 3. Найти площадь пересечения кругов ограниченных этими окружностями.

### Вариант № 3

1. Путь от школы до дома в 300 м Вова проделал, сделав 400 шагов, причем длина каждого шага была не более  $a$  см, а сумма длин любых двух шагов была больше длины любого другого шага. Какие значения при этих условиях может принимать число  $a$ ?

2. Целые положительные числа  $x, y$ , для которых  $НОД(x, y) = 4$ , являются координатами вершины квадрата с центром в начале координат с площадью  $\frac{50}{3} \cdot НОК(x, y)$ . Найти длину диагонали квадрата.

3. При каких значениях  $x$  выражение

$$3 - \left| \operatorname{tg}(\sqrt{2}\pi \cos \pi x) \right| - \left| \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\sqrt{2} \sin 3\pi x}{2}\right) \right|$$

принимает наибольшее возможное значение?

4. Для каких значений  $a$  система  $\begin{cases} 10x^2 + x - a - 11 = 0 \\ 4x^2 + (a + 4)x - 3a - 8 = 0 \end{cases}$  с  
овместна? Решить систему для всех допустимых  $a$ .

5. Центр окружности радиуса 2 лежит на окружности радиуса 5. Найти площадь объединения кругов, ограниченных этими окружностями.

## Вариант № 4

1. Путь от школы до дома в 180 м Костя проделал, сделав 300 шагов, причем длина каждого шага была не более  $a$  см, а сумма длин любых двух шагов была больше длины любого другого шага. Какие значения при этих условиях может принимать число  $a$ ?

2. Целые положительные числа  $x, y$ , для которых  $\text{НОД}(x, y) = 5$ , являются координатами вершины квадрата с центром в начале координат с площадью  $\frac{169}{6} \cdot \text{НОК}(x, y)$ . Найти длину стороны квадрата.

3. При каких значениях  $x$  выражение

$$4 + \operatorname{tg}^2(2\pi \sin \pi x) + \operatorname{ctg}^2(3\pi \cos 2\pi x)$$

принимает наименьшее возможное значение?

4. Для каких значений  $a$  система 
$$\begin{cases} 12x^2 + 48x - a + 36 = 0 \\ (a + 60)x - 3(a - 20) = 0 \end{cases}$$

совместна? Решить систему для всех допустимых  $a$ .

5. При каком наибольшем целом  $n$  два решения уравнения  $x^3 - (n+9)x^2 + (2n^2 - 3n - 34)x + 2(n-4)(n+3) = 0$  больше 2?