Решения и ответы

Вариант 1

Задача 1 Ответ: 15 двухкомнатных квартир

Решение. Введем обозначения:

n – число однокомнатных квартир; m — число двухкомнатных квартир;

k — число трехкомнатных квартир.

Условие задачи:

$$\begin{cases} n+m+k=45 \\ n+2m+3k=80 \\ m \ge 1,5k,\ \ n \ge 1,3m \end{cases} \to \begin{cases} m=35-2k \\ n=10+k \\ \dfrac{355}{36} \le k \le 10 \end{cases}$$

С учетом целочисленности k имеем $k=10,\ \ n=20, m=15$

Задача 2 Ответ: в три раза

Решение. Пусть ω_1, ω_2 и ω_3 – производительности поедания конфет Дашей, Сашей и Машей соответственно.

Условие задачи:

$$\begin{cases} \omega_2+\omega_3=2\omega_1 \\ \omega_1+\omega_3=3\omega_2 \end{cases} \to \begin{cases} 2\omega_1-\omega_2=\omega_3 \\ \omega_1-3\omega_2=-\omega_3 \end{cases} \to \begin{cases} \omega_1=\dfrac{4\omega_3}{5} \\ \omega_2=\dfrac{3\omega_3}{5} \end{cases}$$

Вопрос задачи: $k=\dfrac{\omega_1+\omega_2+\omega_3}{\omega_1}=\dfrac{\frac{12}{5}\omega_3}{\frac{4}{5}\omega_3}=3$

Задача 3 Ответ: 32 пары

Решение. Число $a=p_1^k \cdot p_2^m \cdot p_3^n$ с тремя простыми делителями p_1, p_2, p_3 имеет $(k+1)(m+1)(n+1)$ различных делителей. Найдем число различных пар (x, y) взаимно простых делителей числа a. Число различных пар, содержащих единицу, например, $x=1$ равно $(k+1)(m+1)(n+1)$, поскольку в качестве y может быть взят любой делитель числа a. Различные пары взаимно простых делителей (x, y), не содержащие единицы и одного из простых делителей p_s, $s=1,2,3$, имеют вид:

1. $x=p_1^q, y=p_2^r, q=1,2,...,k, r=1,2,...,m$. Таких пар $k \cdot m$ штук.

2. $x=p_1^q, y=p_3^t, q=1,2,...,k, t=1,2,...,n$. Таких пар $k \cdot n$ штук.

3. $x=p_2^r, y=p_3^t, r=1,2,...,m, t=1,2,...,n$. Таких пар $m \cdot n$ штук.

В следующих вариантах образования искомых пар делителей, не содержащих единицы, участвуют все три простых делителя:

4. $x = p_1^q, y = p_2^r \cdot p_3^t, q = 1,2,...,k, r = 1,2,...,m, t = 1,2,...,n$. Таких пар $k \cdot m \cdot n$ штук.

5. $x = p_2^r, y = p_1^q \cdot p_3^t, q = 1,2,...,k, r = 1,2,...,m, t = 1,2,...,n$. Таких пар $k \cdot m \cdot n$ штук.

6. $x = p_3^t, y = p_2^r \cdot p_1^q, q = 1,2,...,k, r = 1,2,...,m, t = 1,2,...,n$. Таких пар $k \cdot m \cdot n$ штук.

Тогда общее число N различных пар взаимно простых делителей числа a равно

$$N = (k+1)(m+1)(n+1) + km + kn + mn + 3mnk = 4mnk + 2\left(km + kn + mn\right) + (m+n+k) + 1$$

В варианте 1 $x = 2x_1, y = 2y_1$, где x_1, y_1 – взаимно простые делители числа $540 : 2 = 270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$.

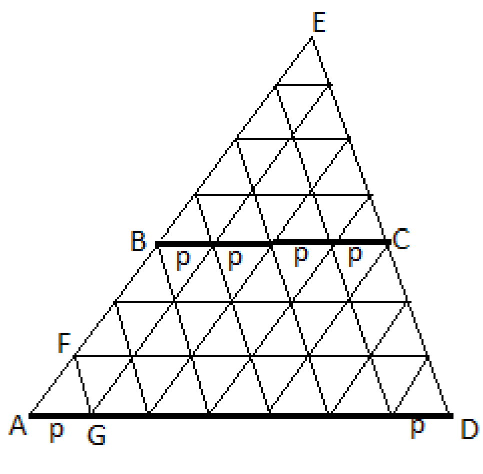
Число различных взаимно простых пар $\left(x_1, y_1\right)$ делителей числа $270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$ получается по общей формуле N для $k = 1, m = 3, n = 1$:

$$N = 4 \cdot 3 + 2\left(3+1+3\right) + (1+3+1) + 1 = 32$$

Задача 4 Ответ: $n_{\min} = 5$

Решение. Пусть a и b, $a > b$ длины оснований трапеции (целые числа) и p – общий делитель чисел a и b.

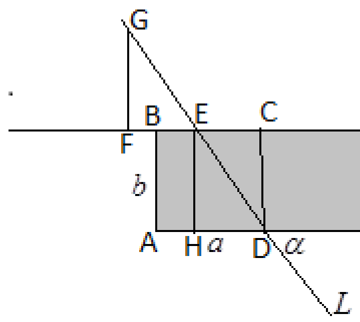
Тогда $a = p \cdot a_1, b = p \cdot b_1$. Трапеция может быть разрезана на равные треугольники только так, как это изображено на рис.



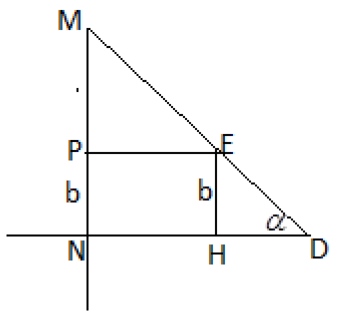
Достроим трапецию до треугольника AED, продолжив ее боковые стороны до их пересечения в точке E. Основание AD трапеции $ABCD$ разделим на a_1 отрезков длины p и через их концы проведем прямые параллельные сторонам AE и DE соответственно. Соединим точки пересечения этих прямых со сторонами AE и DE прямыми, параллельными основанию AD. Поскольку BC параллельна AD, построенные прямые разобьют BC на b_1 отрезков длины p. Общее число равных между собой треугольников, на которые разбит треугольник AED равно a_1^2, среди них b_1^2 треугольников принадлежат треугольнику BEC. Тогда число n треугольников, на которые будет разбита трапеция $ABCD$ равно $n = a_1^2 - b_1^2 = \frac{a^2 - b^2}{p^2}$. Наименьшему значению n соответствует $p = НОД(a,b)$.

В варианте 1 $a = 108 = 2^2 \cdot 3^3$, $b = 72 = 2^3 \cdot 3^2$, $НОД(a,b) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$. Тогда $n_{\min} = \frac{108^2 - 72^2}{36^2} = \frac{36^2 \cdot 9 - 36^2 \cdot 4}{36^2} = 5$

Задача 5 Решение.



В построении используются стандартные задачи: 1) построение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярную заданной прямой; 2) построение прямой, проходящей через заданную точку, параллельной заданной прямой; 3) построение треугольника равного данному.
Этапы построения:
1. Строим прямоугольный треугольник с заданным катетом b и противолежащим ему острым углом α (треугольник DHE);



На стороне угла α выбирается произвольная точка M, из которой опускается перпендикуляр MN на другую сторону угла. Точка P на перпендикуляре MN отстоит от N на b. Через точку P проводится прямая PE, параллельная прямой DN. Из точки E опускается перпендикуляр EH. Треугольник DHE искомый. Длина катета $DH = c$.

2. На границе отмечаем точку C с условием $BC = a$;

3. На границе отмечаем точку E с условием $CE = DH = c$ (E – точка выхода луча за пределы препятствия);

4. Строим треугольник CFG, равный треугольнику DHE с катетом FE, лежащим на границе BC или ее продолжении;

5. Прямая EG – искомое продолжение луча за пределы препятствия.

Вариант 2

Задача 1 Ответ: 30 однокомнатных квартир

Задача 2 Ответ: в $1,25$ раза

Задача 3 Ответ: 38 пар

Задача 4 Ответ: $n_{\min} = 56$

Задача 5 построения

Вариант 3

Задача 1 Ответ: 30 двухкомнатных, 40 однокомнатных.

Задача 2 Ответ: в $2\frac{2}{9}$ раза

Задача 3 Ответ: 23 пары

Задача 4 Ответ: $n_{\min} = 45$

Задача 5 (построения)

Вариант 4

Задача 1 Ответ: 15 трехкомнатных, 30 двухкомнатных, 50 однокомнатных.

Задача 2 Ответ: Аня убирается в $1,2$ раза быстрее, чем Надя и в $1,5$ раза быстрее, чем Алена

Задача 3 Ответ: 113 пар

Задача 4 Ответ: $n_{\min} = 51$

Задача 5(построения)